XI CONGRESO LATINOAMERICANO
DE BIOLOGÍA MATEMÁTICA
SoLaBIMa 2019
Universidad Católica del Maule
22-25 de Octubre de 2019, Talca, Chile

Dinámicas de un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower modificado con respuesta funcional Holling tipo III y efecto Allee afectando a las presas

Sebastián Valenzuela-Figueroa*
Centro de Docencia Superior en Ciencias Básicas,
Universidad Austral de Chile, Puerto Montt, Chile

Resumen

La principal característica de los modelos depredador-presa del tipo Leslie o modelo logístico [20] o modelos del tipo Leslie-Gower [2], es que la capacidad de carga del medio ambiente del depredador K_y es una función del tamaño de presa $x = x(t)$, es decir, depende de los recursos alimenticios disponibles.

En el modelo original propuesto por Philip H. Leslie en 1948 [15], se asume que la capacidad de carga ambiental de los depredadores es proporcional a la abundancia de presas, es decir, $K_y = K(x) = nx$,

En este trabajo analizamos un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower [15, 20], considerando tres aspectos importantes:

i) La acción de los depredadores o respuesta funcional es una función sigmoidea racional [12, 19],

ii) los depredadores cuentan con un alimento alternativo [2, 14] y,

iii) las presas están afectadas por un efecto Allee [7, 13].

El efecto Allee es un fenómeno ecológico que afecta a algunas especies [7, 18].y que queda en evidencia a bajos tamaños (densidades) de población. En Ciencias Pesqueras es llamado *depensación* [6, 17].

Es originado por diversas causas [4] y su estudio se ha incrementado en las últimas décadas, debido a la alta probabilidad que las poblaciones afectadas puedan extinguirse [4].

Es descrito mediante distintas expresiones algebraicas [7, 14], muchas de las cuales son topológicamente equivalentes [10]. En este trabajo se usará la más común en la literatura ecológica [20], representada por la ecuación siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)(x - m)\,x,$$

De acuerdo a la definición del efecto se tiene que $-K < m << K$. Cuando $m > 0$, se tiene un *efecto Allee fuerte*; existe un *efecto Allee débil* si $m < 0$ y un *efecto Allee débil especial* cuando $m = 0$ [7, 14].

* e-mail: sebastian.valenzuela@uach.cl

Proposición del modelo

En este trabajo se analiza un modelo, derivado del modelo propuesto por Patrick H. Leslie en 1948 [15]. El modelo en estudio es representado por un sistema autónomo bidimensional de ecuaciones diferenciales no lineales del tipo Kolmogorov [8, 9] dado por:

$$X_{\mu}(x,y):\begin{cases} \frac{dx}{dt} &=& r\left(1-\frac{x}{K}\right)(x-m)\,x-\frac{q\;x^2}{x^2\;+\;a^2}y \\ \frac{dy}{dt} &=& s\left(1-\frac{y}{nx+c}\right)\;y \end{cases} \tag{1}$$

donde $x=x(t)$ e $y=y(t)$ son los tamaños poblacionales de las presas y los depredadores respectivamente, con $\mu=(r,K,q,a,s,n,m,c)\in\mathbb{R}_+^6\times\,]-K,K[\,\times\,]0,\infty[$ y los parámetros tienen diferentes significados ecológicos

El sistema (1) está definido en

$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\geq 0,y\geq 0\right\}$.

Con el objeto de simplificar los cálculos se efectúa un cambio de variables y un reescalamiento del tiempo dado en la siguiente proposición:

Proposición. Sistema topológicamente equivalente

El sistema (1) es topológicamente equivalente a

$$Y_{\eta}(u,v):\begin{cases} \frac{du}{d\tau} &=& u(u+C)\left((1-u)(u-M)\;(u^2+A^2)-Quv\right) \\ \frac{dv}{d\tau} &=& Bv(u+C-v)(u^2+A^2) \end{cases} \tag{2}$$

con $\eta=(A,B,C,Q,M)\in\,]0,1[\,\times\left(\mathbb{R}_0^+\right)^3\times\,]-1,1[$. El sistema (2) está definido en

$\bar{\Omega}=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/u\geq 0,v\geq 0\right\}$.

En lo que sigue asumiremos que $M>0$ y $C>0$, pero más adelante consideraremos el caso $M=0$.

Los puntos de equilibrio del sistema (2) o campo vectorial $\mathrm{Y}_{\eta}(u,v)\,son(0,0)$, $(1,0)$, $(0,C)$, $(M,0)$ cuando $M>0$, y los puntos (u_e,v_e) que están en la intersección de las isoclinas

$v=u+C$ y $v=\frac{(1-u)(u-M)(u^2+A^2)}{Qu}$.

Se obtiene el polinomio

$$p(u)=u^4-(1+M)\,u^3+\left(A^2+M+Q\right)u^2-\left(A^2\,(M+1)-CQ\right)u+MA^2 \tag{3}$$

Por lo tanto tenemos los siguientes casos:

a) El polinomio $p(u)$ puede cambiar 4 veces de signo, si y sólo si (ssi), $\left(A^2\,(M+1)-CQ\right)>0$.

b) El polinomio $p(u)$ puede cambiar 2 veces de signo, ssi, $\left(A^2\,(M+1)-CQ\right)\leq 0$.

Luego, para analizar la dinámica del sistema (2), y por consecuencia las del sistema (1) se deben considerar diferentes casos en los cuales es difícil determinar explícitamente las coordenadas de los puntos de equilibrio postivos (o al interior del primer cuadrante)

En este trabajo asumiremos el caso particular en que $\left(A^2\,(M+1)-CQ\right)=0$ y por lo tanto, $Q=\frac{A^2(M+1)}{C}$, lo cual disminuye la cantidad de parámetros.

Dinámica con efecto Allee débil

En este trabajo consideraremos que la población de presas está afectada por el efecto Allee débil especial, es decir, asumimos que $M=0$; esto podrá determinar explícitamente las coordenadas de los puntos de equilibrio positivos

En este caso particular se obtiene que el polinomio que describe las abscisas de los puntos de equilibrio del sistema es:

$$\begin{aligned} p(u) &= u^4-u^3+\left(A^2+Q\right)u^2 \\ &= \left(u^2-u+\left(A^2+\frac{A^2}{C}\right)\right)u^2 \\ &= \left(u^2-u+A^2\left(1+\frac{1}{C}\right)\right)u^2 \end{aligned}$$

El sistema (2) tiene en este caso sólo tres parámetros y es descrito por el sistema

$$Y_\pi\left(u,v\right):\begin{cases}\frac{du}{d\tau} &= u^2(u+C)\left((1-u)\ (u^2+A^2)-\frac{A^2}{C}v\right)\\ \frac{dv}{d\tau} &= Bv(u+C-v)(u^2+A^2)\end{cases}\tag{4}$$

con $\pi=(A,B,C)\in\,]0,1[\,\times\left(\mathbb{R}_0^+\right)^2$.

Los puntos de equilibrio de este sistema son: $(0,0)$, $(0.C)$, $(1,0)$ y (u_e,u_e+C) donde u_e satisface la ecuación:

$$u^2-u+A^2\left(1+\frac{1}{C}\right)=0$$

es decir,

$$u_{e1}=\frac{1-\sqrt{1-\frac{4A^2}{C}\left(C+1\right)}}{2}\text{ y }u_{e2}=\frac{1+\sqrt{1-\frac{4A^2}{C}\left(C+1\right)}}{2}$$

Claramente, $u_{e1}<u_{e2}$. Sea $\Delta=1-\frac{4A^2}{C}\left(C+1\right)=\frac{C-4A^2(C+1)}{C}$

Luego, tenemos los siguientes casos

a) u_{e1} y u_{e2}, son reales positivos, si y solo si, $A^2<\frac{C}{4(C+1)}$.

b) u_{e1} y u_{e2}, son reales positivos iguales, si y solo si, $A^2=\frac{C}{4(C+1)}$.

c) u_{e1} y u_{e2}, son complejos conjugados, si y solo si, $A^2>\frac{C}{4(C+1)}$.

Nótese que el parámetro B, no influye en la determinación de la cantidad de puntos de equilibrio.

Resultados principales

1. El conjunto $\bar{\Gamma}=\left\{(u,v)\in\bar{\Omega}/0\leq u\leq 1,v\geq 0\right\}$. es una región positivamente invariante.
2. Las soluciones son acotadas.
3. El punto $(0,0)$ es un repulsor no-hiperbólico.
4. El equilibrio $(1,0)$ es punto silla hiperbólico para todo valor de parámetros
5. El punto $(0,C)$ es atractor no-hiperbólico.

La matriz Jacobiana en los puntos de equilibrio positivos $(u,u+C)$ es:

$$DY_\pi\left(u,u+C\right)=\begin{pmatrix}u^2(u+C)\left(-A^2-3u^2+2u\right) & -\frac{A^2}{C}u^2\left(C+u\right)\\ B\left(A^2+u^2\right)\left(C+u\right) & -B\left(A^2+u^2\right)\left(C+u\right)\end{pmatrix}$$

Luego,

$\det DY_\pi\left(u,u+C\right)=Bu^2\left(A^2+u^2\right)\left(C+u\right)^2\frac{A^2C+3Cu^2-2Cu+A^2}{C}$ y,
$\operatorname{tr}DY_\pi\left(u,u+C\right)=\left(u+C\right)\left(u^2\left(-A^2-3u^2+2u\right)-B\left(A^2+u^2\right)\right)$

6. El punto $(u_{e1},u_{e1}+C)$ es un punto silla hiperbólico.

La traza depende del factor

$T=u^2\left(-A^2-3u^2+2u\right)-B\left(A^2+u^2\right)$,

6. El punto $(u_{e2},u_{e2}+C)$ es

I) atractor, si y sólo si, $B<\frac{u^2\left(-A^2-3u^2+2u\right)}{\left(A^2+u^2\right)}$,

II) repulsor, si y sólo si, $B>\frac{u^2\left(-A^2-3u^2+2u\right)}{\left(A^2+u^2\right)}$; Más aún, existe un ciclo límite estable.

III) foco débil, si y sólo si, $B=\frac{u^2\left(-A^2-3u^2+2u\right)}{\left(A^2+u^2\right)}$.

Comentarios

Usando un sistema polinomial topológicamente equivalente al sistema (1) [12, 13], establecemos condiciones en el espacio de parámetros cuando $M=0$, para las cuales existen dos puntos de equilibrio positivos, y determinamos la naturaleza de cada uno de ellos.

Otras propiedades globales del sistema son demostradas; en particular, la existencia de curvas separatrices y de diferentes tipos de bifurcaciones, tales como Homoclínicas, Heteroclínicas [3], de Andronov-Hopf y de Bogdanov-Takens (bifurcación de punto cúspide).

Como tarea pendiente queda establecer la debilidad del foco cuando $B = \frac{u^2(-A^2-3u^2+2u)}{(A^2+u^2)}$ determinando la cantidad de ciclos límites, mediante el cálculo de las cantidades de Lyapunov [1, 11].

Trabajo realizado en conjunto con:
Eduardo González-Olivares[1,a,b],
[a] Instituto de Filosofía y Ciencias de la Complejidad, Santiago, Chile,
[b] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
Alejandro Rojas Palma[2],
Departamento de Matemática, Física y Estadística,
Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile.

Referencias

[1] P. Aguirre, E. González-Olivares, E. Sáez, Three limit cycles in a Leslie-Gower predator-prey model with additive Allee effect, SIAM Journal on Applied Mathematics 69(5) (2009) 1244-1269.

[2] C. Arancibia-Ibarra and E. González-Olivares, A modified Leslie-Gower predator-prey model with hyperbolic functional response and Allee effect on prey, In R. Mondaini (Ed.) *BIOMAT 2010 International Symposium on Mathematical and Computational Biology*, World Scientific Co. Pte. Ltd., Singapore (2011) 146-162.

[3] A. D. Bazykin, *Nonlinear Dynamics of interacting populations*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998.

[4] L. Berec, E. Angulo, F. Courchamp, Multiple Allee effects and population management. Trends Ecol. Evol., 22 (2007) 185-191.

[5] A. A. Berryman, A. P. Gutierrez, and R. Arditi, Credible, parsimonious and useful predator-prey models - A reply to Abrams, Gleeson, and Sarnelle. Ecology 76 (1995) 1980-1985.

[6] C. W. Clark, *Mathematical Bioeconomic: The Optimal Management of Renewable Resources*, (2nd edition). John Wiley and Sons 1990.

[7] F. Courchamp, L. Berec & J. Gascoigne, *Allee effects in ecology and conservation*, Oxford University Press (2008).

[8] H. I. Freedman, *Deterministic Mathematical Model in Population Ecology*, Marcel Dekker (1980).

[9] B-S. Goh, *Management and Analysis of Biological Populations*, Elsevier Scientific Publishing Company, 1980.

[10] E. González-Olivares, B. González-Yañez, J. Mena-Lorca, R. Ramos-Jiliberto, Modelling the Allee effect: Are the different mathematical forms proposed equivalents? In: R. Mondaini (Ed.) *Proceedings of the International Symposium on Mathematical and Computational Biology BIOMAT 2006*, E-papers Serviços Editoriais Ltda., Rio de Janeiro (2007) 53-71.

[1] e-mail: ejgonzal@ucv.cl
[2] e-mail: amrojas@ucm.cl

[11] E. González-Olivares, J. Mena-Lorca A. Rojas-Palma and J. D. Flores, Dynamical complexities in the Leslie-Gower predator-prey model as consequences of the Allee effect on prey, Applied Mathematical Modelling 35 (2011) 366-381.

[12] E. González-Olivares, P. Tintinago-Ruiz and A. Rojas-Palma, A Leslie-Gower type predator-prey model with sigmoid funcional response, International Journal of Computer Mathematics 93(9) (2015) 1895-1909.

[13] E. González-Olivares, L. M. Gallego-Berrío, B. González-Yañez and A. Rojas-Palma, Consequences of weak Allee effect on prey in the May-Holling-Tanner predator-prey model, Mathematical Methods in the Applied Sciences 39 (2016) 4700-4712.

[14] E. González-Olivares, C. Arancibia-Ibarra, A. Rojas-Palma and B. González-Yañez, Bifurcations and multistability on the May-Holling-Tanner predation model considering alternative food for the predators, Mathematical Biosciences and Engineering, 16(5) (2019) 4274-4298.

[15] P. H. Leslie, Some further notes on the use of matrices in population mathematics, Biometrica 35 (1948) 213-245.

[16] P. H. Leslie and J. C. Gower, The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species, Biometrika 47 (1960) 219-234.

[17] M. Liermann and R. Hilborn, Depensation: evidence, models and implications. Fish and Fisheries 2 (2001) 33-58.

[18] P. A. Stephens, W. J. Sutherland & R. P. Freckleton, What is the Allee effect?, Oikos 87 (1999) 185-190.

[19] J. Sugie, K. Miyamoto & K. Morino, Absence of limits cycle of a predator-prey system with a sigmoid functional response, Appl. Math. Lett. 9 (1996) 85–90.

[20] P. Turchin, *Complex population dynamics. A theoretical/empirical synthesis*, Mongraphs in Population Biology 35, Princeton University Press (2003).