



Um estudo de controle ótimo para doenças de citros

Monica Helena Ribeiro Luiz*

Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, Brasil

Resumo

A citricultura é um setor de destaque no agronegócio brasileiro, e junto com o crescimento deste setor está o surgimento de doenças que afetam os citros. Neste trabalho, apresentamos dois modelos matemáticos a fim de descrever a dinâmica e o controle químico de doenças de citros. Tais modelos envolvem a teoria de controle ótimo com várias variáveis e a teoria de controle GRASP. Os modelos são abordados em um cenário para a Huanglongbing, considerada a mais devastadora doença de citros do mundo.

Trabajo realizado en conjunto con:

Lucy Tiemi Takahashi¹, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil.

Rodney Carlos Bassanezi², Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.



1 Introdução

O Cinturão Citrícola no Brasil, concentrado nos estados de São Paulo e Minas Gerais, ocupa uma área de 416 mil hectares e é a maior região produtora de citros do mundo [5]. Em 2016, o Brasil produziu mais de 14,8 milhões de toneladas de laranjas, cerca de 20% da produção mundial; também foi responsável por 60% da produção mundial de suco de laranja [3].

Em contrapartida, as pragas e doenças que atingem os pomares de citros vêm comprometendo o crescimento e a produção das árvores. Em particular, podemos citar a Huanglongbing (HLB): principal doença da citricultura devido às suas características e aos danos causados. Dados de 2017 indicam que a incidência de laranjeiras com sinais de HLB no Cinturão Citrícola brasileiro foi de 16,73%, o que corresponde a aproximadamente 32 milhões de plantas. Até o momento, não existem métodos curativos para a HLB. Desta forma, para conter a disseminação da doença é necessário conter a propagação de seu vetor.

*e-mail: monicahrl@ifsp.edu.br

¹e-mail: ltimei@gmail.com

²e-mail: rodney@ime.unicamp.br

Neste trabalho desenvolvemos dois modelos matemáticos em um cenário bidimensional para descrever meios de controle da HLB. Na modelagem consideramos a dispersão e a dinâmica vital dos psilídeos, e realizamos um estudo de controle ótimo no qual a variável de controle é a quantidade de fungicida a ser aplicada. No primeiro modelo, o espalhamento espacial dos psilídeos é descrito por meio de equações diferenciais ordinárias (EDOs) envolvendo taxas de transporte, e o controle é aplicado utilizando a teoria de controle ótimo com várias variáveis. Já no segundo modelo, o espalhamento espacial é descrito por uma equação diferencial parcial discreta com difusão, e o controle é aplicado em intervalos de tempo pelo método GRASP (*Greedy randomized adaptive search procedure*).

A dinâmica modelada é sobre a população dos vetores, pois consideramos o alcance desta população proporcional aos danos causados pela HLB.

2 Desenvolvimento

2.1 A doença Huanglongbing

A HLB foi descoberta na Ásia no início do séc. XX, em seguida foi identificada na África do Sul, e mais recentemente atingiu os maiores produtores da citricultura mundial: o estado de São Paulo, no Brasil, e o estado da Flórida, nos EUA, em 2004 e em 2005, respectivamente [2]. Seu agente causador é uma bactéria da espécie *Candidatus* (Ca.) *Liberibacter* (L.) spp. que se apresenta nas formas asiática, africana e americana. No Brasil, o vetor transmissor é o psilídeo asiático *D. citri* Kuwayama, inseto que mede de 2 a 3 mm de comprimento [5]. As fêmeas do psilídeo se desenvolvem rapidamente, depositando até 800 ovos por vida, e seu ciclo de vida total pode variar entre 15 e 47 dias [7]. O psilídeo se alimenta da seiva da planta e, na busca por novas fontes de alimento, desloca-se pela vizinhança sem qualquer direção específica. Quando o inseto não infectivo suga a seiva de uma planta infectada para se alimentar, ele se torna infectivo e, então, é capaz de transmitir a bactéria a uma planta sadia durante sua alimentação. Quando a planta é infectada, a bactéria se multiplica em seu sistema vascular, afetando o fluxo de seiva que leva água e nutrientes para todas as suas partes. Deste modo, quando os primeiros sinais são identificados – manchas amarelas nas folhas – toda a planta já foi infectada. Esse período entre infecção e aparecimento de sinais, chamado de incubação, pode levar de 6 a 12 meses dependendo da idade da planta, da temperatura ambiente, dentre outros fatores [2]. Assim, podem haver plantas infectadas no pomar que ainda não apresentam sinais.

Uma vez que uma laranjeira leva até 7 anos para começar a dar frutos, e que sua expectativa de vida produtiva é superior a 15 anos, pomares podem se tornar economicamente inviáveis entre 7 e 10 anos após o aparecimento dos primeiros sinais da doença se medidas de controle não forem tomadas. Por este motivo, a HLB é considerada uma doença rápida e devastadora [1, 6, 9].

Dados de Bassanezi & Bassanezi, em [1], mostram que em pomares jovens com até 5 anos, sem quaisquer medidas de controle, a incidência da doença pode atingir mais de 50%, em aproximadamente 4 anos após o aparecimento dos primeiros sinais. Já em pomares adultos com mais de 6 anos, esse valor será atingido alguns anos mais tarde. Assim, sem a realização de controle da HLB cultivar novos pomares que sejam economicamente sustentáveis se torna uma tarefa difícil [1].

2.2 Modelos de controle ótimo aplicados à HLB

Desejamos conter a disseminação da doença HLB por meio do controle químico dos vetores transmissores, os psilídeos. Apresentamos, nessa seção, dois modelos de controle com o objetivo de minimizar a quantidade de psilídeos e o custo com o controle aplicado.

Consideramos um pomar com 2000 árvores dispostas em 50 talhões com 40 árvores cada. A dinâmica de crescimento de psilídeos se dá segundo a equação de Verhulst, como em Luiz (2018) [9],

sendo r é a taxa de crescimento intrínseco e K a capacidade suporte, iguais em todas as árvores do pomar.

Já que na prática é inviável contabilizar a quantidade de psilídeos de cada árvore do pomar, assumimos que, uma vez que forem identificados psilídeos (infectivos ou não) em um árvore do pomar, esta árvore será considerada infectada.

Para as simulações, supomos que um grupo de psilídeos, sendo ao menos um deles infectivo, é identificado na borda do pomar na chamada árvore primária, pois é desta árvore que se dá origem a disseminação da doença através do deslocamento dos psilídeos para as demais árvores do pomar. E que após a infecção da árvore primária, não há novos focos de psilídeos vindo de fora do pomar. Escolhemos arbitrariamente a 25ª árvore do primeiro talhão como a árvore primária.

Consideramos ainda que os psilídeos de uma árvore somente migrarão para outra árvore quando atingirem 50% de sua capacidade suporte.

2.2.1 Modelo 1: Sistema de EDOs com taxas de transporte e com controle ótimo com várias variáveis

Propomos, baseado em Takahashi (2004) [12], um sistema de EDOs com taxas de transporte para descrever a dinâmica dos psilídeos em um pomar. Vinculado a esse modelo, buscamos o controle ótimo para a disseminação da HLB utilizando a teoria de controle ótimo com várias variáveis [8, 10]. As taxas de transporte são de psilídeos de uma árvore para outra, e representam a difusão.

A disposição e a identificação de cada uma das 2000 árvores do pomar segue o esquema apresentado na Figura 1, sendo A_i a árvore na posição i , com $i = 1, \dots, 2000$.

A_1	A_2	A_3	\dots	A_{50}
A_{51}	A_{52}	A_{53}	\dots	A_{100}
A_{101}	A_{102}	A_{103}	\dots	A_{150}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
A_{1201}	A_{1202}	A_{1203}	\dots	A_{1250}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
A_{1951}	A_{1952}	A_{1953}	\dots	A_{2000}

Figura 1: Disposição e identificação de cada uma das 2000 árvores no pomar para o Modelo 1, sendo $A_i, i = 1, \dots, 2000$, a árvore na posição i .

A dinâmica populacional de psilídeos na árvore i é descrita pelo modelo de Verhulst mais o fluxo de psilídeos nesta árvore [9], ou seja,

$$\frac{dP_i}{dt} = rP_i \left(1 - \frac{P_i}{K}\right) + \underbrace{\beta_i^{in} - \beta_i^{out}}_{\text{fluxo de psilídeos na árvore } i}, \quad (1)$$

sendo $P_i(t)$ a população de psilídeos da árvore i no instante de tempo t , $rP_i \left(1 - \frac{P_i}{K}\right)$ a dinâmica vital do psilídeo com taxa de crescimento r e capacidade suporte K , $\beta_i^{in} = \sum_{j=1}^{2000} \mathcal{M}_{ji}P_j$ a quantidade de psilídeos que chega à árvore i com \mathcal{M}_{ji} a taxa de transporte da árvore j para a árvore i , e $\beta_i^{out} = \sum_{j=1}^{2000} \mathcal{M}_{ij}P_i$ a quantidade de psilídeos que sai da árvore i com \mathcal{M}_{ij} a taxa de transporte da

árvore i para a árvore j .

Assumimos que a taxa de transporte da árvore A_i para as árvores $A_{i-51}, A_{i-50}, A_{i-49}, A_{i-1}, A_{i+1}, A_{i+49}, A_{i+50}$ e A_{i+51} é α_k , fora dessa vizinhança, essa taxa é zero, e $\mathcal{M}_{ij} = 0$ quando $i = j$, pois não há deslocamento de psilídeos de uma árvore para ela mesma. Desta forma, construímos a Matriz de Taxas de Transporte $M = (\mathcal{M}_{ij})$, com $i, j = 1, \dots, 2000$.

A quantidade de psilídeos que sai de uma árvore infectada não é significativa para esta árvore, pois essa saída só ocorre quando a árvore já possui um alto nível de concentração de psilídeos. Contudo, a quantidade de psilídeos que chega em uma árvore sadia é um valor a ser considerado, pois, por menor que seja, é capaz de gerar uma nova infecção. Assim, β_i^{in} é um termo relevante para o modelo enquanto β_i^{out} não tanto, o que permite desconsiderá-lo.

O sistema (1) é um sistema do tipo $P_i' = G_i(t, P_i)$. Inserimos um controle restrito a esse sistema a fim de minimizar tanto a variável P_i quanto a quantidade de fungicida a ser aplicada. Assim, consideramos que a eficiência do controle é proporcional à população P_i e, então, reescrevemos o sistema de estados (1) como $P_i' = G_i(t, P_i, u_i)$ da seguinte forma:

$$P_i' = rP_i \left(1 - \frac{P_i}{K}\right) + \sum_{j=1}^{2000} \mathcal{M}_{ji}P_j - c_1P_iu_i,$$

sendo u_i o controle aplicado na árvore i e $c_1 > 0$ um parâmetro que equilibra a influência do controle u_i sobre P_i .

Portanto, o problema de controle ótimo é:

$$\min_{u_1, \dots, u_{2000}} \int_{t_0}^{t_f} \left(c_2 \sum_{j=1}^{2000} P_j^2(t) + c_3 \sum_{j=1}^{2000} u_j^2(t) \right) dt \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a } \quad & P_i' = rP_i \left(1 - \frac{P_i}{K}\right) + \sum_{j=1}^{2000} \mathcal{M}_{ji}P_j - c_1P_iu_i, \\ & P_i(t_0) = P_{i0}, \end{aligned} \quad (2b)$$

sendo $c_2, c_3 > 0$ constantes que equilibram a ação de P_i e de u_i no intervalo de tempo $[t_0, t_f]$, com $i = 1, \dots, 2000$.

Utilizando o Princípio do Máximo de Pontryagin [10] para resolver este problema, temos:

- o Hamiltoniano:

$$H = c_2 \sum_{j=1}^{2000} P_j^2 + c_3 \sum_{j=1}^{2000} u_j^2 + \lambda rP_i \left(1 - \frac{P_i}{K}\right) + \lambda \sum_{j=1}^{2000} \mathcal{M}_{ji}P_j - \lambda c_1P_iu_i,$$

- a equação de estado:

$$\begin{aligned} P_i' &= rP_i^* \left(1 - \frac{P_i^*}{K}\right) + \sum_{j=1}^{2000} \mathcal{M}_{ji}P_j - c_1P_i^*u_i^*, \\ P_i(t_0) &= P_{i0}, \end{aligned} \quad (3)$$

- a equação adjunta:

$$\begin{aligned} \lambda_i' &= -\frac{\partial H}{\partial P_i} \Rightarrow \lambda_i' = \lambda \left[r \left(2\frac{P_i^*}{K} - 1\right) + c_1u_i^* \right] - 2c_2P_i^*, \\ \lambda_i(t_f) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

- a condição de otimalidade:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0, \text{ para } u_i^* \Rightarrow u_i^*(t) = \frac{c_1\lambda_iP_i^*}{2c_3}, \quad (5)$$

com $P_i = P_i(t)$, $u_i = u_i(t)$, $i = 1, \dots, 2000$.

Resolver o problema de controle ótimo (2) consiste em resolver as equações (3), (4) e (5). Para isso, utilizamos o método numérico de varredura *Forward-Backward* [8].

As simulações foram feitas considerando um período de um ano; a condição inicial é $P_{1201}(0) = 0,1K$ (árvore primária) e $P_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, 2000$, para $i \neq 1201$; os psilídeos deslocam-se exclusivamente segundo as taxas de transporte da Matriz M , sendo que os psilídeos só saem de uma árvore quando sua população nesta árvore atingir 50% de sua capacidade suporte K .

Na Figura 2 é apresentada a solução do problema de controle ótimo (2) para as árvores A_{1201} (25ª árvore do 1º talhão, árvore primária) e A_{1355} (28ª árvore do 5º talhão). No gráfico de cima apresentamos as curvas de estado com e sem efeito de controle ao longo de 12 meses, e no gráfico de baixo a dinâmica ótima do controle.

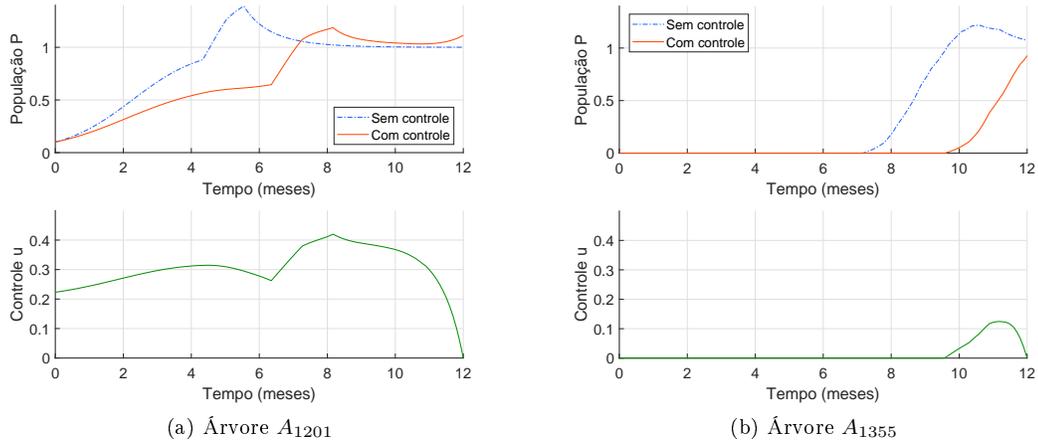


Figura 2: (a) Solução do problema de controle (2) para a árvore A_{1201} (árvore primária) em 12 meses. (b) Solução do problema de controle (2) para a árvore A_{1355} em 12 meses. Na figura de cima temos a população de psilídeos, P , com e sem controle. Na figura de baixo a quantidade de controle utilizada.

Na árvore primária, A_{1201} , Figura 2(a), inicialmente há um aumento da população de psilídeos, o que leva ao aumento da quantidade de fungicida aplicada. Note que, no modelo sem controle, após aproximadamente 4 meses, ocorre um rápido crescimento na população de psilídeos, resultado da difusão acontecendo nas árvores adjacentes à árvore primária, ou seja, neste momento as árvores adjacentes à árvore primária atingiram 50% de sua capacidade suporte e, com isso, os psilídeos de tais árvores começam a migrar para as suas árvores adjacentes ($\beta^{in} > 0$), inclusive para a própria árvore primária, condição imposta na modelagem. No modelo com controle, a difusão começa a acontecer somente após 6 meses, quando há também um rápido aumento na quantidade fungicida aplicada. Próximo ao final de 12 meses, como chega ao término o período de controle, a quantidade de fungicida diminui até que não seja mais aplicada, o que faz com que a população de psilídeos se estabilize em sua capacidade suporte. Isso ocorre pois a simulação foi feita para um período de 12 meses, contudo, na prática, seria iniciado um novo controle logo que a quantidade de psilídeos começasse a aumentar.

Na 28ª árvore do 5º talhão, A_{1355} , Figura 2(b), temos que a população de psilídeos cresce rapidamente após 5 meses do início do controle no pomar e, por este motivo, o controle não é aplicado no início do período (mês 0) como ocorreu na árvore primária. Note que, no modelo sem controle, a aplicação de fungicida teve início após 7 meses, quando são identificados os primeiros psilídeos na árvore, diferente do modelo com controle, no qual o crescimento da população tem

início após 9 meses, isso devido ao controle já estar sendo aplicado nas demais árvores do pomar identificadas com psilídeos. Note também que, ao final do período de aplicação, a população de psilídeos volta a aumentar uma vez que a quantidade de fungicida diminui, como ocorreu com a árvore primária.

A vista por cima do pomar simulado ao final de 12 meses, com e sem a ação do controle, é apresentada na Figura 3. As regiões em branco indicam as árvores saudias, as regiões em preto indicam as árvores infectadas.

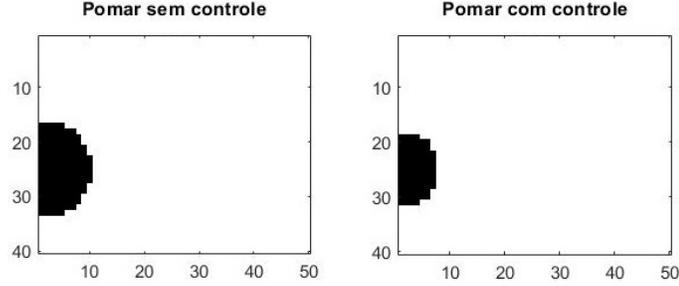


Figura 3: Vista por cima do pomar sem e com a ação do controle ao final 12 meses de simulação. As regiões em branco indicam as árvores saudias, as regiões em preto indicam as árvores infectadas.

Observe que ao final do período de aplicação de fungicida ainda há árvores infectadas, contudo, em menor quantidade. O controle, neste caso, retardou a disseminação da doença.

2.2.2 Modelo 2: EDP com difusão e com controle via GRASP

Propomos agora um modelo para a disseminação da HLB considerando o espalhamento bidimensional difusivo dos psilídeos. Para este modelo, buscamos um controle ótimo pelo método GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*), descrito em Feo e Resende (1995) [4] e em Resende e Ribeiro (2010) [11].

Para este modelo, mudamos a forma de identificar cada árvore do pomar, veja a Figura 4, agora $A_{i,j}$ é a j -ésima árvore no talhão i .

$$\begin{array}{cccccc}
 A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,50} \\
 A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,50} \\
 A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & A_{3,50} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 A_{25,1} & A_{25,2} & A_{25,3} & \dots & A_{25,50} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 A_{40,1} & A_{40,2} & A_{40,3} & \dots & A_{40,50}
 \end{array}$$

Figura 4: Disposição e identificação de cada uma das 2000 árvores no pomar para o Modelo 2, sendo $A_{i,j}$, $i = 1, \dots, 40$, $j = 1, \dots, 50$, a j -ésima árvore no talhão i . A disposição é a mesma apresentada na Figura 1.

A dinâmica populacional de psilídeos na árvore $A_{i,j}$ do pomar é descrita pelo modelo discreto de Verhulst [9], e inserimos um controle a essas dinâmicas a fim de minimizar tanto a população de

psilídeos quanto a quantidade de fungicida a ser aplicado. Considerando que a eficiência do controle é proporcional à população $P_{i,j}$, temos a dinâmica de P com controle dada por:

$$P_{i,j}^{t+1} = P_{i,j}^t + rP_{i,j}^t \left(1 - \frac{P_{i,j}^t}{K}\right) - c_1 V_{i,j}^t P_{i,j}^t, \quad (6)$$

sendo $P_{i,j}^t$ a população de psilídeos da árvore $A_{i,j}$ no tempo t , com $i = 1, \dots, 40$, $j = 1, \dots, 50$, c_1 um parâmetro que pondera a influência do controle $V_{i,j}^t$ sobre a população $P_{i,j}^t$ no instante t . Assumimos também que o espalhamento dos psilídeos por entre as árvores do pomar ocorre segundo a equação bidimensional discreta de difusão obtida por diferenças finitas centrada:

$$P_{i,j}^{t+1} = P_{i,j}^t + D (P_{i-1,j}^t + P_{i+1,j}^t + P_{i,j-1}^t + P_{i,j+1}^t - 4P_{i,j}^t), \quad (7)$$

sendo D o coeficiente de difusão.

Essas duas dinâmicas, equações (6) e (7), ocorrem simultaneamente. Assim, nosso problema de controle ótimo pelo método GRASP é:

$$\min_{P,V} c_2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m P_{i,j}^t + c_3 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m V_{i,j}^t, \quad (8a)$$

$$\text{sujeito a } \begin{aligned} P_{i,j}^{t+1} &= P_{i,j}^t + rP_{i,j}^t \left(1 - \frac{P_{i,j}^t}{K}\right) - c_1 V_{i,j}^t P_{i,j}^t, \\ P_{i,j}^{t+1} &= P_{i,j}^t + D (P_{i-1,j}^t + P_{i+1,j}^t + P_{i,j-1}^t + P_{i,j+1}^t - 4P_{i,j}^t), \end{aligned} \quad (8b)$$

sendo c_2 e c_3 constantes não negativas que equilibram a ação de P e V no problema de minimização.

Para as simulações, consideramos que os psilídeos de uma árvore somente migrarão para outra árvore do pomar quando atingirem 50% de sua capacidade suporte, ou seja, a difusão só ocorre quando $P_{i,j}^t \geq 0,5K$; a aplicação de fungicida é feita somente quando houver alguma árvore que contenha ao menos 70% de sua capacidade de suporte com psilídeos; quando uma árvore satisfizer as condições para receber fungicida, este será aplicado em todo o talhão que a contém, e também nos quatro talhões à direita e à esquerda; e a aplicação de fungicida, respeitando às condições dos itens anteriores, será feita a cada 15 dias, ao longo de um ano.

Pelo método GRASP determinamos a quantidade de fungicida a ser aplicada. A função controle considerada é uma constante no intervalo $[0, 1]$. O algoritmo testa aleatoriamente todos estes valores no modelo implementado, verificando ao final de cada simulação qual valor de V levou ao menor valor para o funcional objetivo (8a). E assim, ao final das simulações, obtemos a melhor solução segundo o método GRASP. É importante ressaltar que este método não garante a otimalidade global, todavia permite uma solução mínima local.

A dinâmica da população com e sem controle e a dinâmica do controle da árvore primária (árvore $A_{25,1}$) e da 28ª árvore do 5º talhão (árvore $A_{28,5}$) são apresentadas na Figura 5, na qual no gráfico de cima temos a dinâmica da população com e sem controle ao longo de 12 meses e no gráfico de baixo a dinâmica do controle. A condição inicial é $P_{25,1}(0) = 0,1K$ e $P_{i,j}(0) = 0$, para todo $(i, j) \neq (25, 1)$.

Na árvore primária, $A_{25,1}$, Figura 5(a), a população tem crescimento logístico até aproximadamente 3 meses, quando atinge 70% de sua capacidade suporte e, então, o controle é iniciado com aplicação a cada quinze dias, e assim segue até o final do período de 12 meses.

Na 28ª árvore do 5º talhão, $A_{28,5}$, Figura 5(b), embora no modelo com controle a população inicie seu crescimento somente após 9 meses, o controle teve início após 3 meses. Isso ocorre devido à condição na aplicação de fungicida, que impõe que este seja aplicado em todo o talhão onde há alguma árvore com psilídeos, ou seja, no 5º talhão, onde está a árvore $A_{28,5}$, foi identificada alguma árvore em condições de receber fungicida após 3 meses do início da simulação, ou ainda, em algum dos quatro talhões à esquerda. Além disso, note que no modelo sem controle a população começa a aumentar passados quase 8 meses, diferente do modelo com controle, quando a população começa a

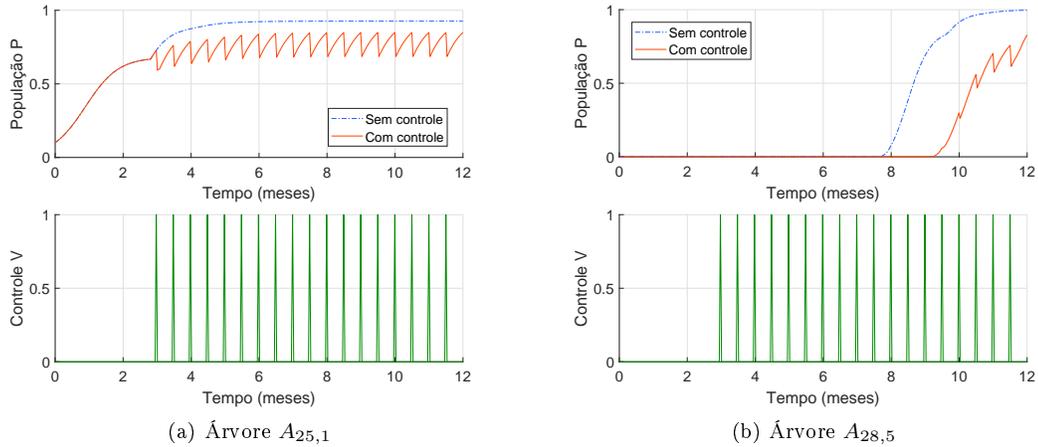


Figura 5: (a) Solução do problema de controle (8) para a árvore $A_{25,1}$ (árvore primária) em 12 meses. (b) Solução do problema de controle (8) para a árvore $A_{28,5}$ em 12 meses. Na figura acima temos a população de psilídeos, P , com e sem controle. Na figura abaixo a quantidade de controle utilizada.

crescer depois de 9 meses. Isso ocorre devido ao controle já estar sendo aplicado nas demais árvores do pomar identificadas com psilídeos.

Para uma visualização bidimensional do pomar sem e com controle ao final de 12 meses, apresentamos a Figura 6. As cores na Figura 6 seguem o padrão estabelecido na Figura 3.

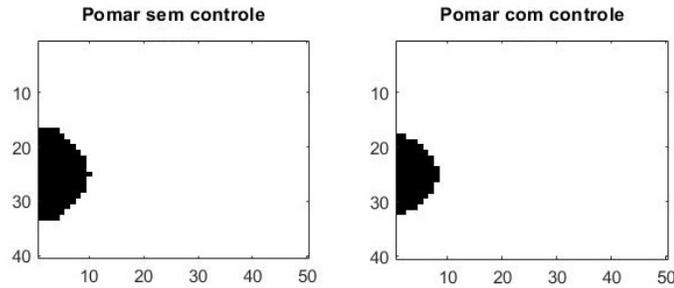


Figura 6: Vista por cima do pomar simulado sem e com controle ao final de 12 meses. As regiões em branco indicam as árvores saudas, as regiões em preto indicam as árvores infectadas.

Observe que, como no modelo anterior, ao final do período de aplicação de fungicida ainda há árvores infectadas, contudo, em menor quantidade. Novamente, o controle retardou a disseminação da doença.

3 Conclusão

Apresentamos dois modelos de controle ótimo para o mesmo cenário – o controle da HLB em um pomar de citros – com abordagens matemáticas e agrícolas diferentes. No primeiro modelo, utilizamos um sistema de equações diferenciais ordinárias com difusão via taxas de transporte,

e controle ótimo segundo Princípio do Máximo de Pontryagin com várias variáveis. No segundo modelo, utilizamos uma equação diferencial parcial discreta para a difusão e o controle ótimo via Grasp garantindo uma otimalidade local. Os modelos foram elaborados com controle químico do tipo fungicida, e ambos apresentaram resultados satisfatórios, a diferença, no entanto, está na situação na qual será utilizado. Em uma situação ideal, o primeiro modelo seria mais apropriado, uma vez que a aplicação de fungicida é feita individualmente em cada árvore do pomar de acordo com sua população de psíldeos, o que leva a um controle mais efetivo com um custo inferior. Por outro lado, o segundo modelo é mais comum, uma vez que a aplicação de fungicida se dá quinzenalmente. Além disso, observamos que o controle químico, em ambos os modelos, retardou o espalhamento da doença pelo pomar, contudo, somente este tipo de controle não foi suficiente para a erradicação da doença, o que indica um manejo integrado (controle químico, físico e biológico).

Referências

- [1] BASSANEZI, R.B.; BASSANEZI, R.C., *An approach to model the impact of Huanglongbing on citrus yield*. Proceedings International Research Conference on Huanglongbing (IRCHLB), 14, (2008), 301–304.
- [2] BOVÉ, J.M., *Huanglongbing: a destructive, newly-emerging, century-old disease of citrus*, Journal of Plant Pathology, 88, (2006), 7–37.
- [3] FAO, *Citrus Fruit - Fresh and Processed Statistical Bulletin 2016*, Rome: Food and Agriculture Organization of the United Nations, (2017).
- [4] FEO, T.A; RESENDE, M.G.C., *Greedy randomized adaptive search procedures*, Journal of Global Optimization, 6, (1995), 109–134.
- [5] FUNDECITRUS, *Doenças e Pragas - HLB/Greening*, Disponível em: <<http://www.fundecitrus.com.br/doencas/greening/10>>, Acesso em: março de 2017, (2007).
- [6] GOTTWALD, T.R; DA GRAÇA, J.V.; BASSANEZI, R.B., *Citrus Huanglongbing: the pathogen and its impact*, Plant Health Progress, (2007).
- [7] GRAFTON-CARDWELL, E.E.; STELINSKI, L.L; STANSLY, P.A., *Biology and management of asian citrus psyllid, vector of the Huanglongbing pathogen*, Anual Review of Entomology, 58 (2013), 413–432.
- [8] LENHART, S.; WORKMAN, J.T., *Optimal Control Applied to Biological Models*, Boca Raton: CRC Press, (2007).
- [9] LUIZ, M.H.R., *Dinâmica e controle de doenças de citros*, Tese de doutorado, IMECC, Unicamp, Campinas, (2018).
- [10] PONTRYAGIN, L.S.; BOLTYANSKIJ, V.J.; GAMKRELIDZE, R.V.; MISHCHENKO, E.F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers, New York, (1962).
- [11] RESENDE, M.G.C.; RIBEIRO, C.C., *Greedy randomized adaptive search procedures: Advances, hybridizations, and applications*. In: M Gendreau and J.Y. Potvin (Ed.). *Handbook of Metaheuristics (International Series in Operations Research & Management Science)*, Boston: Springer, 146 (2010), 283–319.
- [12] TAKAHASHI, L.T.; FERREIRA JR, W.C.; D’AFONSECA, L.A., *Propagação da Dengue entre Cidades*, Biomatemática, 14, (2001), 1–18.