

Modelo SIS para enfermedades alérgicas con tasas de contagio impulsivas.



Edwin Duque-Marín, F.D. Córdova-Lepe, Karina Vilches, Juan. G. Vergaño-Salazar.

Doctorado en Modelamiento Matemático Aplicado
Universidad Católica del Maule
Talca - Chile
fedwer@gmail.com

1. Introducción

Las enfermedades alérgicas afectan aproximadamente entre el 15% y 30% de la población mundial [1], esta prevalencia puede aumentar debido a factores climáticos y ambientales de cada territorio. De hecho, en los últimos años se ha producido un aumento constante en la prevalencia de enfermedades alérgicas a nivel mundial donde un 30-40% de la población del mundo es afectada por una o más enfermedades alérgicas [2], por lo que es fundamental reconocer las enfermedades alérgicas como un problema de Salud Pública.

Se define las alergias como la hipersensibilidad que se adquiere por la exposición a un reactivo específico (alérgeno) o una sustancia estrechamente relacionada con él [3]; Algunas enfermedades alérgicas conocidas son el asma, la rinitis, el eccema y las alergias alimentarias, enfermedades que están alcanzando proporciones epidémicas tanto en el mundo desarrollado como en el mundo en desarrollo [4].

Las enfermedades respiratorias alérgicas son causadas por alérgenos denominados como aeroalérgenos, debido a que se encuentran suspendidos en la atmósfera donde vivimos [1]. De éstos aeroalérgenos se destacan los granos de polen, proteínas de ácaros y cucarachas, epitelios de animales y esporas de hongos [5]. Es imperante conocer entonces cómo factores de carácter ambiental pueden desencadenar en situaciones que coloquen en riesgo la salud de la población y como los comportamientos abruptos de los alérgenos pueden abrir campo a una mayor susceptibilidad de enfermedades infecciosas.

2. El Modelo

El modelo, para una supuesta población y enfermedad infecciosa, incorpora dos estados epidemiológicos: susceptibles (S) e infecciosos (I), dentro de una dinámica basal Susceptibles - Infecciosos - Susceptibles (SIS). Al asumir en la población la existencia de un grupo alérgico, tenemos que esta está compartimentada en los siguientes cuatro tipos: susceptibles alérgicos S_a , susceptibles no alérgicos S_n , infecciosos alérgicos I_a e infecciosos no alérgicos I_n .

Las variables y parámetros que intervienen se presentan en el cuadro 1.

VARIABLE	SIGNIFICADO
$S_n(t)$	Población de susceptibles no alérgicos en el tiempo t .
$I_n(t)$	Población de infecciosos no alérgicos en el tiempo t .
$S_a(t)$	Población de susceptibles alérgicos en el tiempo t .
$I_a(t)$	Población de infecciosos alérgicos en el tiempo t .
ϵ	Impulso en el tiempo t .
α	Tasa efectiva del impulso.
μ	Tasa de muerte global.
γ	Tasa de transición del estado infeccioso al susceptible.
β	Tasa de contacto efectivo entre susceptibles e infecciosos.
p	Proporción de nacimientos de la población susceptible alérgicos.
q	Proporción de nacimientos de la población susceptible.

Cuadro 1: Variables y parámetros.

La dinámica es representada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} S'_a(t) = -(1 + \epsilon(t))\beta S_a(t)\{I_n(t) + I_a(t)\} + \gamma I_a(t) - \mu S_a(t) + p\mu N \\ I'_a(t) = +(1 + \epsilon(t))\beta S_a(t)\{I_n(t) + I_a(t)\} - \gamma I_a(t) - \mu I_a(t) \\ S'_n(t) = -\beta S_n(t)\{I_n(t) + I_a(t)\} + \gamma I_n(t) - \mu S_n(t) + q\mu N \\ I'_n(t) = +\beta S_n(t)\{I_n(t) + I_a(t)\} - \gamma I_n(t) - \mu I_n(t), \end{cases} \quad (1)$$

Donde $q = 1 - p$ y $N = S_a + S_n + I_a + I_n$, y otra de tipo impulsivo para el aumento en la probabilidad de contagio del grupo alérgico

$$\begin{cases} \epsilon'(t) = -\alpha\epsilon(t), & t \neq t_k \\ \epsilon(t_k^+) = \epsilon_0, & t = t_k. \end{cases} \quad (2)$$

Notemos que (1) y (2) en conjunto definen una sistema diferencial impulsivo a tiempos fijos, ver [6]. Observemos además que $N'(t) = 0$, por lo que el tamaño poblacional es constante.

3. Resultados

Para la simulación de los diferentes escenarios estudiados se ha implementado el método de Runge-Kutta de orden 4.

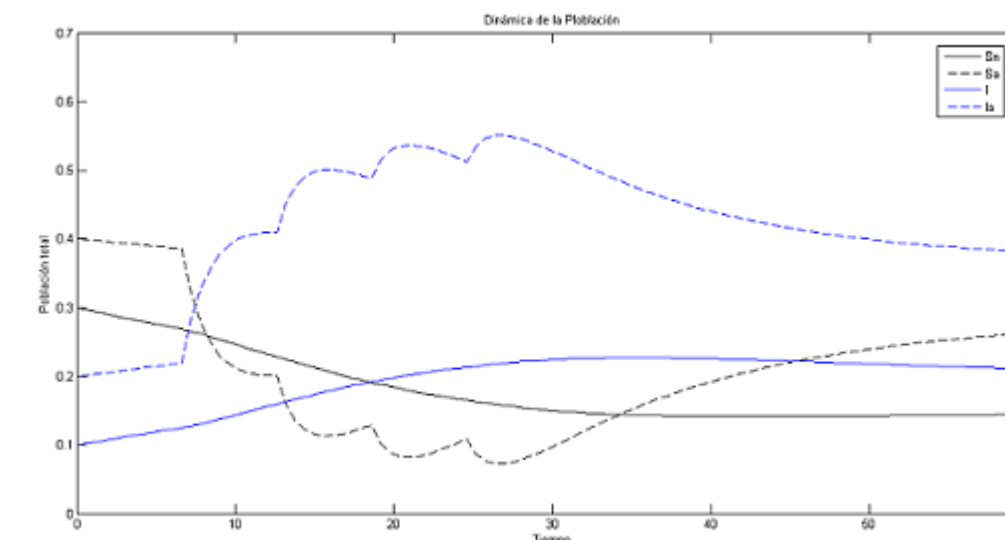


Figura 1: Comportamiento de la población con $S = 0,3$, $S_a = 0,4$, $I = 0,1$, $I_a = 0,2$ valores de los parámetros $\mu = 0,01$, $\alpha = 0,5$, $\gamma = 0,03$, $\beta = 0,09$, $\epsilon_0 = 0,89$, $p = 0,7$, $q = 0,3$

La figura 1 muestra el comportamiento de la población en un escenario con una fuerte presencia del alérgeno en periodos de tiempo no recurrentes.

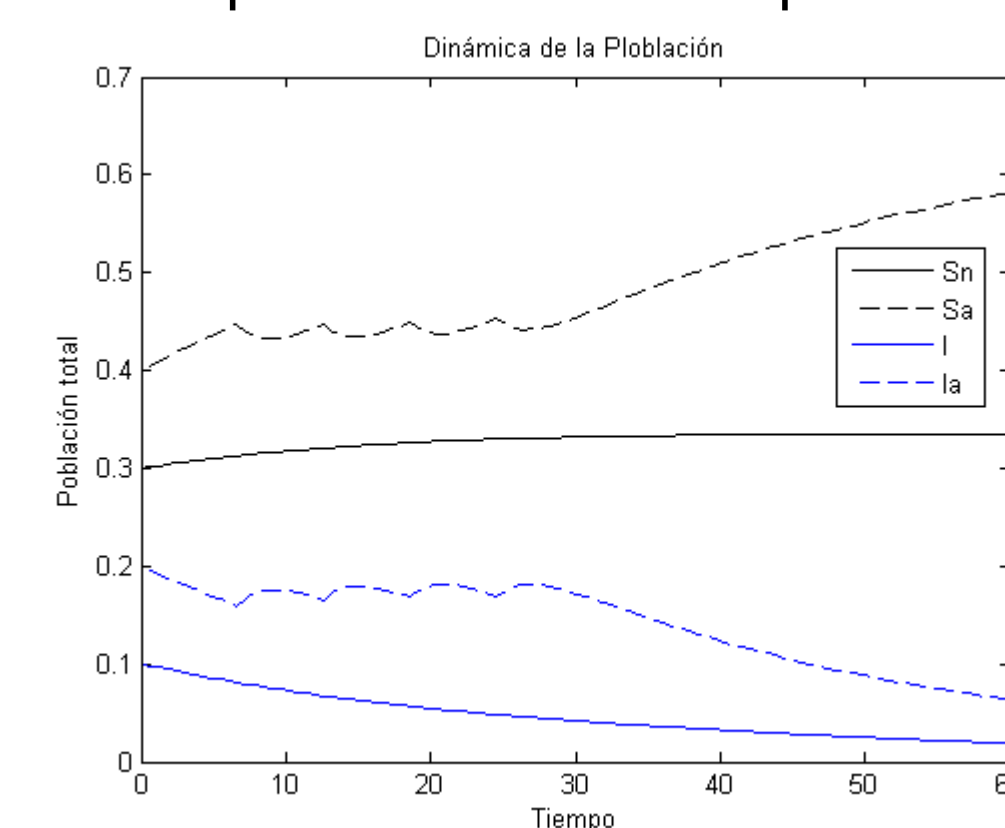


Figura 2: Comportamiento de la población con $S = 0,3$, $S_a = 0,4$, $I = 0,1$, $I_a = 0,2$ valores de los parámetros $\mu = 0,01$, $\alpha = 0,5$, $\gamma = \gamma_a = 0,03$, $\beta = 0,009$, $\epsilon_0 = 0,2$, $p = 0,7$, $q = 0,3$

La figura 2 muestra el comportamiento de la población en un escenario donde existe presencia del alérgeno muy recurrente pero baja probabilidad de contagio de la población.

4. Conclusiones

El estudio del comportamiento de las enfermedades alérgicas es de gran importancia debido a que se aporta evidencia científica para la toma de decisiones en la construcción e implementación de Políticas Públicas en Salud.

La alta presencia de alérgenos en el ambiente aumenta la probabilidad de enfermedades alérgicas y estas a su vez la susceptibilidad a nuevas infecciones.

Los avances de nuestro estudio indican que las personas que poseen alguna enfermedad alérgica presenta mayor susceptibilidad al ingreso de nuevas enfermedades infecciosas.

5. Agradecimientos

Este trabajo es realizado con el soporte y aporte de la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado (VRIP) y la Dirección del Doctorado en Modelamiento Matemático Aplicado (DM₂A), ambos de la Universidad Católica del Maule.

Referencias

- [1] Terán, L. M., Haselbarth-López, M. M. M., Quiroz-García, D. L. (2009). Alergia, pólenes y medio ambiente. Gaceta médica de México, 145(3), 215-222.
- [2] Pawankar, R., Canonica, G. W., Holgate, S. T., Lockey, R. F. (2011). Libro blanco sobre alergia de la WAO. USA: WAO.
- [3] Talmage, D. W. (1957). Allergy and immunology. Annual review of medicine, 8(1), 239-256.
- [4] Holgate, S. T. (1999). The epidemic of allergy and asthma. Nature, 402(6760supp), 2.
- [5] Condemi, J. J., Dykewicz, S. M., Bielory, L., Burks, A. W., Fischer, J. T., Ledford, K. D. (2003). Ambiente interior y ambiente exterior. Alergia e inmunología. Segunda edición. México: Academia Americana de Alergia, Asma e Inmunología/Colegio Americano de Alergia, Asma e Inmunología/Colegio Americano de Médicos/American College of Physicians, 96-107.
- [6] Cordova-Lepe, F., Robledo, G., Cabrera-Villegas, J. (2015). Population growth modeling with boom and bust patterns: the impulsive differential equation formalism. Journal of Biological Systems, 23(supp01), S135-S149.