DISEÑO DE SITUACIONES DE MODELACIÓN. UNA PROPUESTA PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

DESIGN OF MODELING SITUATIONS. APROPOSAL FOR THE INITIAL TRAINING OF MATHEMATICS TEACHERS

Daniela soto S.
Universidad de Santiago de Chile
daniela.soto.s@usach.cl

Resumen

Este documento tiene como objetivo presentar una propuesta de acción que ha permitido, a los futuros profesores de matemática, diseñar situaciones de modelación a la luz de la Didáctica de la matemática. Se documenta acerca de la problemática que existe en la introducción de la modelación al aula, las diferentes perspectivas para el desarrollo de la modelación y la posición de los autores que tienen como investigadores que forman profesores. Se explicita la propuesta para la construcción de situaciones de modelación en el contexto de un curso de didáctica del álgebra y del cálculo (DAC). Se presenta dos diseño construido por los futuros profesores de matemática y sus reflexiones al respecto.

Palabras claves: Situaciones de modelación, Socioepistemológica, Formación inicial de profesores de matemática

Abstract

This document aims to present an action proposal that has allowed future mathematics teachers to design modeling situations in light of the Didactics of mathematics. We documented about the problem that exists in the introduction of classroom modeling, the different perspectives for the development of modeling and the position of the authors that they have as researchers who train teachers. The proposal for the construction of modeling situations in the context of a course in didactics algebra and calculus is explained (DAC), It presents two designs built by future teachers of mathematics and reflections on the results.

Keywords: Modelling situations, Socioepistemological, Initial training of math teachers

Introducción

La formación inicial del profesor es una de las preocupaciones principales de la educación, esto queda reflejado en los diferentes proyectos que se han establecido en las universidades públicas del país, además de los procesos de acreditación de las carreras de pedagogía, que tienen especificaciones que solo comparten con la carrera de medicina.

En particular, en el área de la matemática se han documentado ampliamente las dificultades y los diferentes caminos a seguir en tanto a la formación (Alsina, 2010; Llinares, 2007, Reyes- Gasperini y Cantoral, 2014; Ball, D., Thames, M. y Phelps, G., 2008)

La Didáctica de la Matemática, como disciplina científica, ha hecho un esfuerzo por desarrollar diferentes posturas y miradas acerca de la formación del profesor de matemáticas. Por ejemplo Llinares (2007) señala:

> El desafío para los programas de formación inicial y permanente y de las oportunidades diseñadas para potenciar el aprendizaje a lo largo de la vida procede del carácter integrado del conocimiento (por ejemplo la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de contenido

> pedagógico específico de las matemáticas) y cómo el profesor define su participación en la “práctica” de enseñar matemáticas y cómo los estudiantes para profesor llegan a generar su propia aproximación a la enseñanza de las matemáticas (p. 2).

Específicamente, sobre el futuro docente y la modelación matemática se han documentado diferentes experiencias de cursos y/o asignaturas que promueven la reflexión sobre la modelación, que muestran la preocupación por incluir la modelación en la formación inicial del profesor de matemáticas (Villa-Ochoa, 2015, Méndez, 2016, Solar, H., Azcárate, C., & Deulofeu, J., 2012).

En este sentido se presenta una propuesta para un curso de didáctica del algebra y del cálculo, y que pudiera extenderse a cualquier curso de didáctica de la matemática. Este curso se desarrolla en el plan de estudio del programa de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile. Los principales fundamentos de la propuesta radican en problematizar la modelación en el aula, el reconocimiento de la comunidad y el diseño con tecnología, su aplicación y el rediseño. Esto de manera integrada promueve el desarrollo de propuestas innovadoras, por parte de los futuros profesores, para la modelación matemática en el aula.

El acento de los diseños está en reconocer el estudio del cambio, de la variación y el uso de la gráfica.

La problemática

El currículo nacional propone a la modelación como una de las cuatro habilidades para desarrollar el pensamiento matemático, junto a: representar, resolver problemas, argumentar y comunicar.

Actividades, como la que se presenta en la figura I, se puede encontrar en documentos oficiales, estas buscan constituir marcos de referencia para el profesor de matemática y el desarrollo de la modelación en el aula:

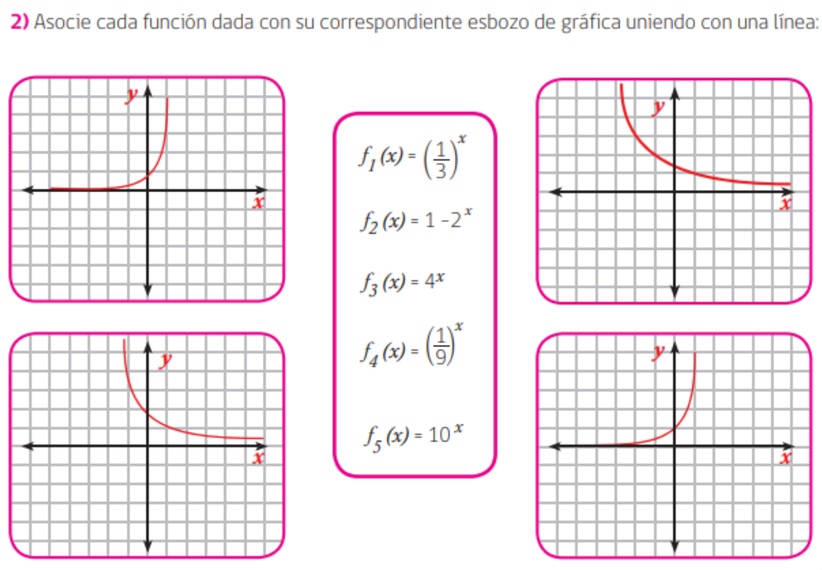


Figura 1. Huircán y Carmona (2013, p.14)

Esta actividad, por ejemplo, expuesta en el documento que tiene por título "Modelando el mundo con funciones exponenciales y logaritmos" si bien permite la conversión entre diferentes registro de representación (D´amore, 2009) de la función exponencial, carece del fundamento principal, de acuerdo a diferentes posturas epistemológicas sobre la modelación, que es: la conexión entre la realidad y la matemática (Blum y Borromeo, 2009; Cordero, 2015; Blomhøj, M., 2009; Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., & Garcia, F. J. , 2007).

Por otro lado, es común encontrar en los documentos oficiales propuestos por el Ministerio de Educación chileno, problemas que pretenden desarrollar la habilidad de modelar:

2. Una empresa automotriz quiere proyectar la venta de dos modelos de autos para el resto del año, considerando que a fines de febrero se han vendido 90 unidades del modelo A y 60 del modelo B. Para los próximos meses, se estima que la venta mensual del modelo A será de 15 autos y del modelo B, de 20 autos. Se quiere saber el mes en el cual la venta del modelo B podría igualar la venta del modelo A.

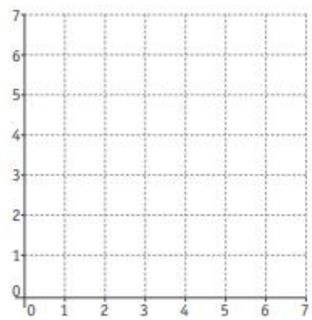
Modelar

Utilizar un lenguaje funcional para resolver problemas y representar fenómenos cotidianos y científicos. (0A h)

a. Completan la siguiente tabla:

FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
90										
60										

b. Confeccionan el gráfico eligiendo los ejes y la escala que muestra el desarrollo de la venta de ambos modelos de auto, y determinan el mes en el cual la venta del modelo B iguala la venta del modelo A.



- Elaboran las ecuaciones de las funciones afines que modelan la venta de ambos tipos de auto. La variable independiente x representa los meses y la variable dependiente y representa el número de autos vendidos.

Figura II. Matemática, Programa de estudio, primero medio (MINEDUC, 2016, p.105)

En el programa de primera año medio este problema (Figura II) se presenta como una actividad que permite el desarrollo de la habilidad de modelar. Ahora bien, en este caso el problema presenta un contexto, la instrucción permite que los estudiantes transiten entre diferentes registros de representación semiótica (tabular, gráfica y algebraica), lo que pudiera entenderse como diferentes modelos que expresan la realidad del problema, sin embargo, la principal crítica es cómo lo modelado transforma al modelo en este caso (Díaz y Arrieta, 2015, Mena, 2015).

Las actividades que componen estos materiales pudieran estar expresando el *discurso matemático escolar* (Soto y Cantora, 2014) actual de la modelación en el aula y por tanto, normaría lo que el profesor de matemáticas estar entendiendo por el desarrollo de la modelación. En otras palabras, un pequeño análisis de los diferentes instrumentos oficiales acerca de las actividades que presuponen el desarrollo de la modelación en el aula, da indicios acerca del real impacto de la modelación en la sala de clases. En este tenor, Soto, Silva, Barbe y Vergará, (2018) desarrollaron una investigación donde se evidencio la falta de herramientas teóricas y prácticas por parte del profesor de matemática para abordar la habilidad de modelar en la enseñanza y evaluación.

Ante la necesidad de generar situaciones de modelación para el aula e introducir tempranamente al profesor en el diseño y rediseño de esas actividades, la pregunta que emerge de manera natural es ¿Cómo generar una propuesta que permita al futuro profesor de matemática diseñar sus propias situaciones de modelación para la clase de matemática?

La modelación

Para el currículo nacional, la modelación permite “construir un modelo físico o abstracto que capture parte de las características de la realidad, para estudiarla, modificarla y/o evaluarla” (Mineduc, 2015).

Trabajos en Chile como el de Aravena, Camaño y Giménez (2008) apoyan la tesis de la que es necesario implementar la modelación en el aula. Desde esta perspectiva se destaca la aplicación de los conocimiento matemáticos a situaciones reales que estén en estrecha relación con la temática de estudio y sea susceptible a la formulación matemática propuesta.

Desde la didáctica de la matemática existen diferentes concepciones acerca la modelación en la clase de matemáticas. Una visión que ha destacado es la aportada por

Blum y Borromeo (2009), para los cuales la modelación es el proceso de traducción entre el mundo real y la matemática y viceversa. Según estos autores la tarea de modelar es usualmente difícil para los estudiantes ya que requiere de otras competencias como: la lectura y comunicación, el diseño y aplicación de estrategias de resolución de problemas.

Estos autores proponen un ciclo de modelación, que permite establecer siete procesos cognitivos por los cuales debe transitar un sujeto al resolver una tarea de modelación. Si bien las investigaciones desarrolladas bajo este modelo ha dejado claro que el camino no es necesariamente lineal. Se espera que el estudiante complete el ciclo, es decir logre transitar desde el mundo real al mundo matemático y luego vuelva al mundo real.

Huincahue, Burromeo y Mena (2018) explican este proceso de la siguiente forma; la captura de la realidad a través de sus datos transforma la observación en una construcción matemática para analizar e incluso predecir la diversidad misma que la realidad permite; estableciendo un ciclo de validación en la matemática y en el mismo fenómeno.

Por tanto se coincide en un argumento para la modelación en el aula. La importancia de la realidad, de contextos cercamos al estudiante y de la importancia que la realidad trastoque al modelo y viceversa.

Por otro lado, Villa-Ochoa (2015) plantea que una forma de introducir la Modelación Matemática (MM) en la formación de profesores, es la utilización de “análisis de modelos”. Afirma que:

> Al abordar situaciones reales del contexto sociocultural (incluyendo otras ciencias y disciplinas) como fuente en la cual la MM tiene su génesis al interior del aula, hemos observado que la modelación se convierte en una herramienta que permite resignificar dichos contextos, y adicionalmente la

> modelación debe avanzar hacia la noción de práctica que incluye reelaboraciones e interpretaciones de modelos ya construidos.

Para explicar esto, en Villa-Ochoa (2015) se hace referencia a una situación de análisis de un modelo de gestación de un bebé, en el que se utilizan diferentes representaciones, como: tabular, graficar y lenguaje natural. Se reconocen tres momentos en el análisis del modelo:

1. Acercamiento a las representaciones.
2. Profundización del fenómeno.
3. Reflexionar sobre los resultados.

Lo interesante del análisis de modelos es la aplicación de la tríada de Giere (1999): objeto que se modela, relación de representación y el objeto que modela, además del usuario. Cuando el usuario es el profesor en formación, éste adopta un estatus diferente. Puede constituirse en otro sujeto que debe comprender no solo los aspectos de las representaciones, lo modelado y el modelo, sino también todo lo que implica que la modelación sea una herramienta didáctica. En este sentido, el profesor es otro usuario, pero su relación con los objetos presentes en la tríada es diferente al usuario habitual (Villa-Ochoa, 2015).

Este autor propone que el modelo matemático es una estructura utilizada para la representación de una realidad específica o una situación; mientras que la modelación es una herramienta para el estudio de distintas situaciones.

Arrieta y Díaz (2015) señalan que la modelación debe ser una práctica con vivencia, la cual puede ser una actividad de las comunidades y no necesariamente académica. Por ejemplo, la actividad del cardiólogo, cuando diagnostica y prescribe un tratamiento a un paciente con alteraciones en su corazón, lo realiza a partir de una gráfica llamada electrocardiograma, o de una tabla de datos obtenida desde un test de esfuerzo, lo cual es modelación. Estos autores señalan la importancia de no poder desvincular los modelos respecto de quien modela. En el caso del electrocardiograma, para un niño solo representa un papel con rayas, mientras que para el cardiólogo es un instrumento que le permite intervenir una realidad.

Para estos autores, la MM es una práctica de articulación de dos entes: el modelo y lo modelado; esto lo denominan *Dipolo Modélico*.

> Desde esta perspectiva, el modelo no existe independiente de la actividad de quien modela. La articulación de los entes iniciales da lugar a un nuevo ente, al modelo (mo), que resulta adherido a lo modelado (ma). Tal articulación constituye una nueva entidad para la vivencia de quien modela y que podemos denotar (ma, mo) y que nominamos dipolo modélico (DM) (Arrieta y Díaz, 2015b, p. 35).

De esta forma, podemos observar que otro fundamento importante es el reconocimiento de lo modelado y el modelo, en otras palabras el fenómeno y el objeto que lo modela. Lo cual representa el mundo real y el mundo matemático.

Como se observa en las diferentes posturas que se han expuesto en esta sección, al margen de los intereses y preocupaciones en torno a la modelación, se presume que su enseñanza y aprendizaje debe estar ligada con la realidad.

Modelación- graficación

La Teoría Socioepistemológica (TS) concibe a la modelación como una práctica social que ha permitido al humano; hombres y mujeres, construir conocimiento matemático. En este sentido, se cuestiona el hecho de que la mayoría de los aproximaciones que versan sobre la modelación tomen como referente la acción o las estructuras cognitivas que se realizan en escenarios científicos para problematizar y sistematizar los elementos que intervienen cuando se modela.

La (TS) presume considerar que *la gente en su cotidiano también modela*. Esto promueve una visión diferente de la modelación matemática para la enseñanza, ya que el foco no estará en definir los pasos que debe llevar a cabo un individuo para llevar a cabo una modelación matemática, sino más bien en develar cuales son las prácticas de cada comunidad que les permite llevar a cabo procesos de modelación.

Ahora bien, desde el análisis soioepistemologico de diferentes investigaciones se ha concluido que el cálculo fue construido, en un primer momento, a partir de argumentaciones gráficas (Suarez y Cordero, 2010) y variacionales (Cantoral, 1990, 2013, Caballero, 2019). Donde la modelación de fenómenos de la naturaleza, específicamente el estudio del cambio, toma un rol protagónico.

De esta forma, elementos como el uso de la gráfica y argumentos variacionales son fundamentales para el rediseño del discurso matemático escolar actual de la modelación.

Desde la TS se ha estudiado el binomio modelación-graficación (M-G) (Suarez y Cordero, 2010) la cual expresa un argumento que promueve el fortalecimiento de la matemática escolar. Se considera que el binomio M-G es una prácticas socialmente compartidas que permite la construcción del conocimiento, por tanto se pueden encontrar en los escenarios, situaciones y contexto propios de cada comunidad. De esta forma, un aspecto innovador de la modelación vista desde la TS es la necesidad de reconocer a priori y explorar los escenarios donde la modelación se resignifica para cierta comunidad, con el fin de diseñar situaciones donde se vea involucrada la M-G. En otras palabras, mientras la mayoría de las perspectivas en torno a la modelación buscan situaciones reales en donde se apliquen conocimientos matemáticos específicos, e identificar los procesos que lleven al estudiante a la adquisición conceptual del objeto (por ejemplo: función lineal, cuadrática , entre otras), la propuesta de esta desde la TS es que se debe estudiar a la comunidad de conocimiento desde cuatro dimensiones (cognitiva, epistemológica, didáctica y social) y con el fin de proponer las situaciones que harán emerger diferentes conocimientos matemáticos, promoviendo así pluralidad de argumentaciones para los objetos matemáticos.

Desde de la TS se han estudiado diferentes escenarios (Montiel, 2011); el histórico epistemológico, el cotidiano, los escenarios culturales, de la escuela y de los diferentes dominios disciplinares, esto ha permitido la resignificación del conocimiento matemático en diferentes situaciones, por ejemplo: situación de variación, de aproximación, de transformación y de selección.

Por otro lado, problematizar el rol de la gráfica en la matemática escolar, ha dado cuenta de que esta ha quedado en un estatus de representación, ya sea de las funciones o para el ordenamiento de datos (utilización típica en estadísticas), esto ha soslayado el hecho de que históricamente y en el cotidiano, la argumentación gráfica ha permitido la construcción de nuevo conocimiento (Cordero, Cen y Suarez, 2010; Cordero y Flores, 2007). Si se observa el currículo actual de Matemáticas o los textos de estudio, la gráfica solo aparece como un apoyo a las nociones estudiadas. En tanto, que permite la visualización y es una representación que conceptualiza un objeto matemático. La argumentación gráfica pareciera no ser válida dentro del discurso matemático escolar, mientras, que la argumentación algebraica ha imperado en la escuela.

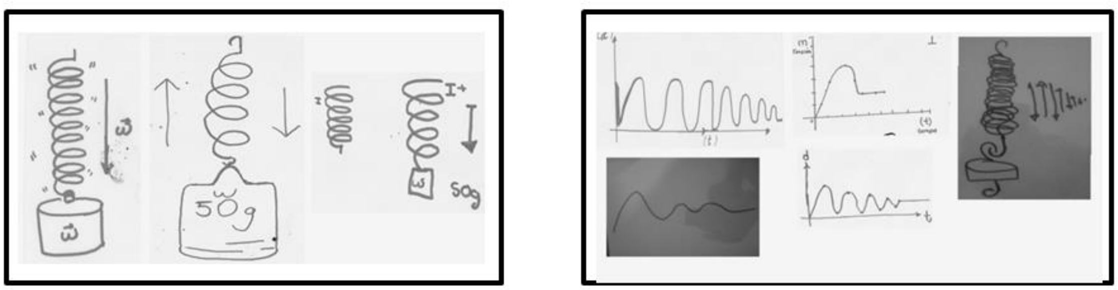
A través de diferente trabajo desde la TS se ha intentado dar un nuevo estatus al uso de la gráfica como una práctica social que permite la construcción del conocimiento matemático (Morales y Cordero, 2014). El estudio desarrollado por Cordero y Flores (2007) muestra cómo la gráfica es explicita como temática a partir de la enseñanza de las funciones o en estadística, sin embargo se ha reconocido un síntoma de la gráfica desde los primeros niveles de la educación básica. Es decir, la gráfica antecede a la noción de función en la matemática escolar y su uso es transversal en la enseñanza de la Matemática. La gráfica transita desde los niveles básicos hasta llegar a la enseñanza de nivel superior, por ejemplo en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Suárez y Cordero (2010) reportan que en parte de la obra de Oresme (Clagett, 1968), se usaban figuras geométricas para describir una cualidad del movimiento. La manera en que Oresme justificó esta cualidad es tomando un punto de una línea horizontal, y levantar una perpendicular a esta línea para representar el cambio de intensidad, es decir, el cambio de cantidad de movimiento (Briseño, 2013).

La representación de la cualidad del movimiento en líneas perpendiculares es usada en un rectángulo para representar un movimiento que no varía, un triángulo rectángulo representa una situación de cambio en que la intensidad aumenta proporcionalmente a lo largo de una extensión de tiempo. Y otras figuras con un contorno distinto a un movimiento no uniforme. Por tanto, la graficación es argumentativa en un escenario de modelación.

Briseño (2013) y Zaldívar (2014) han dado cuenta de cómo las gráficas en un contexto de modelación y tecnología, a partir de situación específica del movimiento, hacen emerger conocimientos que no son considerados en la matemática escolar. Los sujetos de estudio en estas investigaciones realizan acciones, organizan comportamientos, proponen hipótesis, resignifican sus conocimientos matemáticos, entre otras cosas. Un resultado importante de estas investigaciones, ha sido mostrar el tránsito de la noción de movimiento desde una concepción de trayectoria, al análisis de los fenómenos en un eje de coordenadas a partir de la distancia y el tiempo. Además se ha evidenciado que los argumentos de los estudiantes se van resignificando desde las propias situaciones en las cuales se encuentran involucrados.

Zaldívar (2014) en su situación de análisis de fenómeno del resorte, distingue tres momentos donde la gráfica se resignifica: el uso del síntoma de la gráfica, el momento del uso de la curva y el momento del uso de la gráfica. Por ejemplo, en el momento 1, los estudiantes dan argumentaciones sobre la trayectoria de los fenómenos (figura.1a). Las argumentaciones, en este momento, son del tipo: "Rebota","Va para arriba", "Va para abajo", "Vibra","con fuerza".



a b

Figura III. Uso del síntoma de la gráfica y Uso de la curva

En el momento 2, con ayuda de la tecnología y las preguntas que lleven a la crisis; por ejemplo ¿En tu gráfica (Figura. 3a), cómo sabes cuándo se detiene el resorte?, las gráficas son articuladas con la situación puestas en juego; ya aparecen curvas que muestran el comportamiento del fenómeno. En este momento las argumentaciones de los estudiantes se encuentran en relación al tiempo y las distancias: "arriba", "abajo", "rápido", "se detiene", "ya no se mueve", "se estabiliza". Por último, en el momento 3, los estudiantes realizan análisis locales de la curva, donde consideran los tiempos y las distancias; se argumenta en torno a los puntos de referencias, por ejemplo dónde se encuentra ubicado el sensor; se analiza en torno al funcionamiento de la tecnología, los aspectos relevantes y sus limitantes, además se establecen relaciones entre diferentes variables, como la constante de elasticidad del resorte o las pesas.

En resumen, desde la TS los diseños que consideran el estudio del cambio, de la variación y el uso de la gráfica expresa y representa a la gente. Ya que estos elementos han permitido históricamente y en la actualidad la construcción del conocimiento, por tanto este tipo de diseños permite la democratización del aprendizaje y una socialización efectiva.

Por otro lado, Mendez (2016) señala que los diseños de situación de modelación escolar están basados en:

a) La experimentación o experiencia evocada; de donde se obtienen y tienen sentido los datos a estudiar; las condiciones iniciales y el comportamiento general del fenómeno darán significado a los dominios o rangos de funciones, en general conllevará a la formulación de los modelos matemáticos.
b) El estudio de las variaciones locales y globales en los datos expresados en gráficas o tablas numéricas.
c) La descripción, análisis y ajuste de comportamientos que transforman los datos en modelos, con los que es posible predecir a corto o largo plazo (o aproximar a un valor específico) el fenómeno o situación estudiada.

Figura III. Méndez, Marquina, Zuñiga (2017)

Esto permite señalar la importancia de llevar a cabo experimentaciones en la sala de clases. El análisis local y global de graficas que represente fenómenos de cambio y el ajuste de las gráficas según las variaciones de un fenómeno o viceversa.

Propuesta de acción y Metodología

El curso de didáctica del algebra y del cálculo (DAC) se dicta en el quinto semestre del plan de estudio de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile.

La propuesta para el diseño de situaciones de modelación por parte de los futuros profesores contempla tres hitos importantes:

- Problematización de la modelación

Se problematizan la modelación desde diferentes enfoque: cognitivos, didácticos sociales y socioepistemológicas. Se estudian, analizan, discuten y sociabilizan diferentes lecturas sobre la modelación. Se destaca el uso de la gráfica, el rol el docente frente a una situación de modelación, la relación matemática realidad, el bipolo modélico, el estudio del cambio y la variación.

En este hito se puede también desarrollar una problematización del saber escolar, es decir que el foco se ponga sobre un objeto matemático que emerja de la situación de modelación. Por ejemplo: problematizar la noción de función cuadrática, función lineal, ecuaciones, sistemas, entre otros.

- Reconocimiento de la comunidad

Los estudiantes diseñan y aplican un diagnóstico a estudiantes y profesores de la comunidad educativa que se visita. Utilizando los aspectos problematizados en la etapa 1.

- Diseño, aplicación y rediseño

De acuerdo a lo problematizado, los diagnósticos desarrollados, los estudiantes proponen diferentes diseños de situación de modelación ajustados a la comunidad. La utilización de la tecnología es un aspecto fundamental, al igual que la ingeniería didáctica para la validación local de sus diseños.

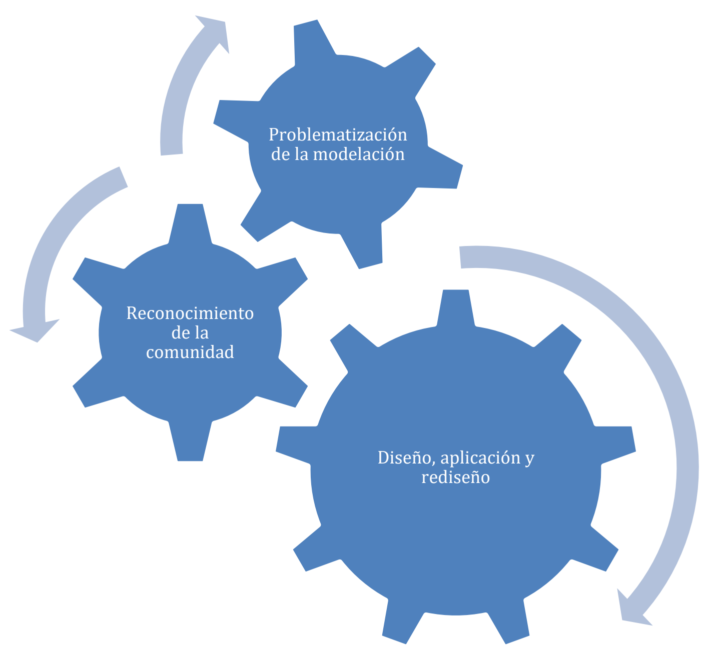


Figura IV. Propuesta para el diseño de situaciones de modelación en la formación inicial del profesor

Resultados

Con el fin de ejemplificar el tipo de diseños de modelación que se han construido se tomará la situación titulada **“el encadilamiento”** y “**¿Por qué ponemos sal al hielo?**”. Estos diseño se desarrolla con el uso de sensor de luminosidad y de temperatura respectivamente, y la utilización de la calculadora graficadora.

Es importante destacar que ambas propuestas no provienen de la misma generación de estudiantes, la primera fue desarrolla el segundo semestre de 2017 y la segunda el primer semestre de 2018.

Diseño de situación de modelación: “el encandilamiento”

Este diseño pone su atención en uno de los objetos matemático que emergen durante la situación de modelación; la noción de inecuaciones, por tanto la problematización se desarrolló en términos del objeto matemático.

Problematización del saber: las inecuaciones

En la situación del encandilamiento, los estudiantes reconocieron las inecuaciones lineales como un objeto emerge necesario para el análisis del fenómeno del “encandilamiento.”. Ante esto desarrollan una búsqueda curricular.

> *Las inecuaciones lineales se encuentra presente en cuarto año de enseñanza media, específicamente en el eje curricular de algebra. El aprendizaje esperado se relaciona con que los alumnos aprendan a resolver problemas que involucren las inecuaciones.*

AE 02 Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales.	› Elaboran las inecuaciones lineales que modelan el fenómeno involucrado en un problema. › Representan gráficamente el conjunto solución de un sistema de inecuaciones lineales. › Comprueban en forma gráfica y algebraica si un par (x,y) pertenece o no al conjunto solución de un problema. › Comunican soluciones a problemas relativos a inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales.

Los estudiantes también revisan de manera crítica algunos textos de estudio:

> *la enseñanza de esta noción matemática se introduce a partir de la noción de conjunto, lo que dará paso a las desigualdades y sus propiedades. La definición que se utiliza de desigualdad es "toda relación de orden que se establece entre números reales u otras expresiones matemáticas, mediante la comparación "menor que" (<), "menor o igual que" (≤), "mayor que" (>) o "mayor o igual que" (≥)" [….]. Finalmente se presenta las inecuaciones como "una desigualdad que tiene una o más incógnitas. Para resolverla, debemos encontrar todos los valores de las incógnitas que hacen verdadera la desigualdad.".*

La problematización del objeto matemático también contemplo la búsqueda de diferentes investigaciones que problematizan el objeto matemático en cuestión:

> *Arévalo y Rojas* (2015) *indican que el desarrollo de este conocimiento se lleva a cabo de forma algorítmica lo que conlleva a una problemática, dado que los alumnos aprenden a resolver inecuaciones a través de procedimientos ya establecidos, sin darle un real significado. En el ámbito de investigación de este objeto, Borello y Lezama* (2011) *indican que las investigaciones que se realizan en torno a las inecuaciones, se centran en aspectos cognitivos, así como también en aspectos didácticos,*

es decir, las investigaciones apuntan a como aprender y/o enseñar las inecuaciones y no se centran en las inecuaciones en sí. Sin embargo, el estudio de las inecuaciones juega un papel importante, ya que forma parte de varios tópicos, como por ejemplo: el álgebra, la trigonometría, la programación y el estudio de las funciones (Bazzini y Tsamir, citados por Borello, 2010). Por último, cabe señalar que los estudiantes no logran interpretar las inecuaciones de forma gráfica, centrándose solo en su representación algebraica (Barbosa, 2003).

La falta de significados gráficos, apoyan al diseño del encandilamiento. El equipo de estudiantes justifica la elección del objeto matemático en el cual centraran su situación de modelación.

Es por esto que se decidió problematizar esta noción, ya que es evidente que existen variadas dificultades en el aprendizaje y enseñanza de las inecuaciones lineales, estas las podemos resumir de la siguiente forma:

- Problemas para relacionar la desigualdad con las inecuaciones
- La resolución de inecuaciones es equivalente a resolver ecuaciones
- Problemas para representar gráficamente las inecuaciones
- Variadas situaciones en donde se encuentran presentes las inecuaciones

La problematización considera al mismo tiempo la búsqueda de elementos históricos epistemológicos sobre el objeto matemático, ante esto los estudiantes señalan:

Bagni (citado por Borello, 2010) realiza una investigación con respecto a la historia del algebra y más específicamente hace una comparación entre la historia de las ecuaciones y la de las inecuaciones. En dicha investigación

> comienza hablando del momento en que aparece el signo de igualdad y como esta idea que parece tan simple conlleva una gran complejidad cognitiva por lo que, la comprensión de la idea de igualdad ha llevado a una serie de análisis cognitivos con respecto a los elementos que la construyen. […] Bagni (2008) dice que la historia de las ecuaciones a diferencia de las inecuaciones, es mucho más completa ya que el concepto de ecuación se puede relacionar con cualquier proceso, en cualquier parte del mundo. En el caso de las inecuaciones no resulta ser algo similar, ya que antiguamente todas las ideas se podían relacionar con el concepto de desigualdad y no con las inecuaciones, un ejemplo de esto es cuando Euclides habla acerca de las desigualdades relativas a elementos de un triángulo. Sin embargo Bagni afirma que las inecuaciones se pueden conectar con el desarrollo de técnicas de análisis matemático, todo esto basándose en las ideas trabajadas por Hairer y Wanner. Finalmente el autor termina diciendo que, si bien a las inecuaciones se le había dado un rol importante en el ámbito de la didáctica, todavía se puede observar una cierta dependencia operativa, ya que muchas veces la resolución de inecuaciones se reduce a la resolución de la ecuación asociada.

El uso de la tecnología también se probelmatiza, al respecto los estudiantes señalan:

> El uso de la tecnología se ha ido incorporando a las clases de matemáticas como un recurso didáctico para la enseñanza, ya que actualmente la tecnología es algo indispensable en la vida del ser humano (Briceño, 2008). Ahora bien, existe un marco de referencia que estudia la importancia del papel que juega el uso de estas tecnologías (artefacto) en la enseñanza y

> aprendizaje de las matemáticas que se llama Génesis Instrumental. [..] Con la situación, los estudiantes podrán experimentar con las calculadoras graficadoras, generando distintos gráficos, tablas, etc. En otras palabras podrán conocer el artefacto y saber cómo utilizarlo (instrumentalización). Por otro lado, luego de haber experimentado con la calculadora, entender cómo funciona y a priori conocer sus potencialidades y limites, podrán generar nuevos conocimientos.

Diseño de Situación

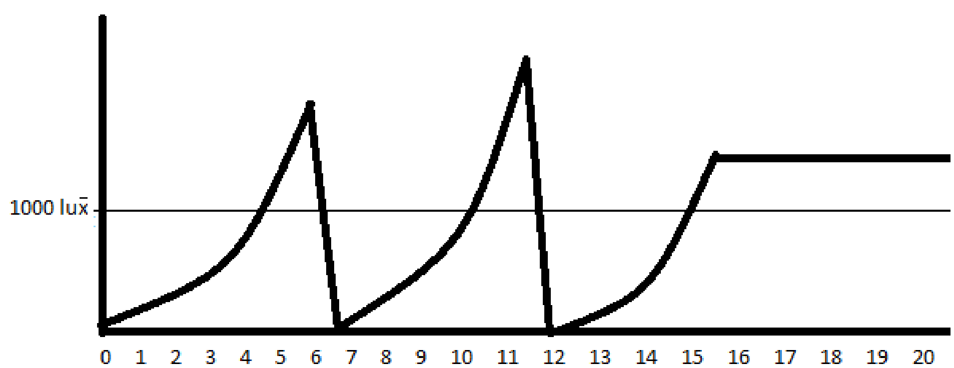
Los estudiantes articulan la problematización del saber con el uso de la tecnología para argumentar sus propuestas de diseños de situación de modelación.

> Alvarenga (citado por Arévalo, 2015) señala que la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones dentro del ámbito escolar debe abarcar actividades que involucren resolución en el contexto gráfico, uso de tablas, relación con las funciones, etc. Es por esto que con la ayuda de las calculadoras graficadoras se propone una situación que busca que los alumnos den un nuevo significado a las inecuaciones, siendo capaces de relacionarlo con el concepto desigualdad.

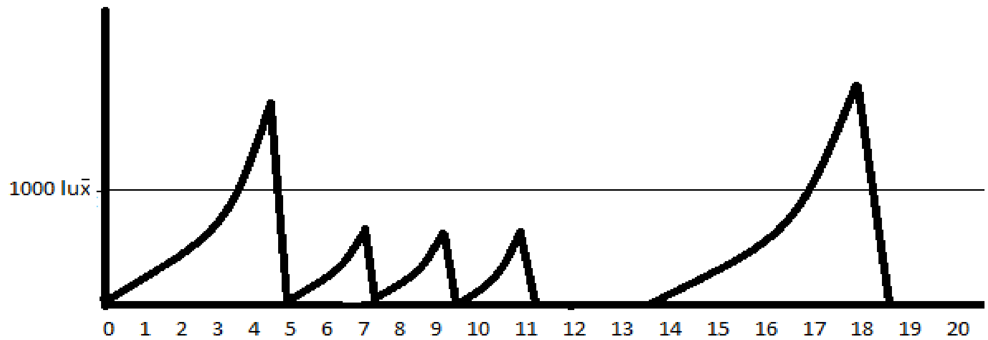
El diseño consiste en simular un cruce entre dos autos utilizando una lámpara de escritorio y el sensor de luminosidad donde la variable será la distancia entre el sensor y la lámpara. Se deberán ubicar el sensor y la lámpara a cierta distancia la cual será la distancia inicial, luego se acerca el sensor hacia la lámpara, a una velocidad contante, observando la la gráfica del fenómeno. La situación se llevara a cabo en distintas fases:

- Momento I: la posición del sensor con respecto de la lámpara será variada: directa y los dos acercándose. Los estudiantes deberán analizar los gráfico de cada situación y responder las siguientes preguntas:
    1. ¿En qué segundo el conductor se encandila?
    2. ¿En qué segundo se alcanza el máximo de luminosidad?
    3. ¿Entre que intervalos se podría encandilar el conductor?, sabiendo que una persona se encandila a los 1000lux.
    4. ¿Qué sucede en la gráfica entre el segundo en que se alcanza el máximo y cuando el nivel de luminosidad baja?
- Momento II: Se presentaran distintos gráficos los cuales deberán interpretar y dar el conjunto de solución, respondiendo las siguientes preguntas:
    1. ¿Cuál es la situación que describe el grafico?
    2. ¿En qué momentos el conductor se encandila?

    - Grafico 1:



    - Grafico 2:



- Momento III: Se presentara distintos intervalos, donde los estudiantes deberán describir que situación representa cada intervalo a través de un gráfico.

Diseño de la situación de modelación: ¿Por qué ponemos sal al hielo?

Este diseño pone su atención en el fenómeno que se estudia, se desarrollan análisis locales y glabales de la gráfica, para finalizar con el análisis de la variación de la temperatura en el tiempo

Problematización de la modelación

Este diseño pone su centro de atención en el fenómeno, a diferencia del diseño anterior, que pone el foco en uno de los objetos matemáticos al que

> Esta actividad tiene el propósito de explorar la paradoja que a veces ocurre entre observación e ideas preconcebidas, a partir de un hecho habitual que es común en invierno en muchas ciudades.
>
> Dicha paradoja radica en una doble pregunta: ¿Por qué se vierte sal en las carreteras para evitar que se hielen?, ¿Por qué si queremos enfriar rápidamente unas bebidas, ponemos sal en el hielo?

Para responder a esas preguntas, los alumnos y alumnas participan en una actividad de modelación en la cual trabajan a nivel matemático y químico, colocando en práctica además las cuatro habilidades planteadas por el currículum, pero específicamente la habilidad de modelar, pues mediante una situación cotidiana aplicada a un contexto matemático, les permitirá llegar a conclusiones que abren nuestra mirada hacia un elemento muy particular: el agua.

Se hará referencia a la habilidad de modelar, como "...construir un modelo físico o abstracto que capture parte de las características de una realidad para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla; asimismo, ese modelo permite buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades (objetos, fenómenos, situaciones, etc.), estimar, comparar impactos y representar relaciones" (Mineduc, 2013, pp.108). El objetivo de construir estos modelos es que los estudiantes descubran ciertas regularidades y/o patrones, además de que puedan expresar esas características, desarrollando la capacidad de razonar y resolver problemas. Por otro lado, se afirma que el hecho de usar metáforas de experiencias cercanas ayudaría a los estudiantes a comprender ciertos conocimientos matemáticos.

En esta actividad se dan unas pautas para su puesta en marcha y realización, pero no se deben considerar como un protocolo cerrado.

Reconocimiento de la comunidad

Para el diseño de esta situación se desarrolló un diagnostico a estudiantes de la comunidad escolar en la cual se tiene un convenio para el desarrollo de estas actividades. El equipo que diseño esta situación escribe lo siguiente con respecto al diagnóstico:

> *A pesar de que el currículo escolar fomenta el trabajo de las habilidades en las actividades propuestas en los textos de matemáticas , los alumnos al preguntarles por las habilidades que son necesarias para aprender matemáticas, automáticamente nos dicen que la memorización es una de ellas, reflejando que la metodología de enseñanza es estructurada y conductista, la cual fomenta sólo la memorización, lo que trae como consecuencia la ausencia de situaciones en donde coloquen en práctica , por ejemplo, la modelación matemática, permitiendo que interioricen el significado del objeto matemático tratado comprendiendo la funcionalidad de cada uno de ellos y utilizarlos en lo cotidiano según el contexto en el que se enfrente cada uno de ellos.*

Diseño de situación

Momento I: Contextualizar

Se les plantea a los alumnos por qué cuando una carretera está helada hay camiones esparciendo sal. Se pueden buscar vídeos e imágenes en Internet. Se espera que el alumnado exprese la idea inicial de que la sal derrite el hielo.

Pregunta

Si queremos enfriar unas bebidas con hielo, ¿añadimos sal al hielo para enfriar más rápidamente la bebida? ¿Qué le pasa al hielo cuando se le añade sal? En un primer momento, los estudiantes deben interactuar con los distintos recipientes. Se tendrán cinco recipientes en total, de los cuales uno tendrá agua, dos con agua y hielo y dos con hielo.

Importante es que ellos dialoguen y predigan sobre el comportamiento de cada vaso antes de agregar el factor de cambio, lo cual en este caso sería la sal.

Plantean sus hipótesis, las cuales, deberían ir cambiando a medida que se realice una crisis entre cada momento.

Momento II: Actuar y analizar

Como segundo momento el grupo de estudiantes usará los vasos y la consola de sensores con el sensor de temperatura para registrar los cambios de temperatura que presenta cada recipiente sin incorporar la sal. Contrastando lo que predijeron al inicio de la actividad con el comportamiento visto mediante el software de la consola.

Se desarrollará una crisis cuando se incorpore sal a uno de los recipientes que posee hielo con agua y otro que posee solo hielo.

Posteriormente se registran los datos en una tabla, la cual nos permitirá comparar las temperaturas observadas. Además, se puede medir la temperatura ambiental para iniciar una discusión posterior, en la fase de reflexión, sobre la influencia de este factor.

Incorporar sal en uno de los recipientes que contiene: agua con hielo y solo hielo.

Así nos quedan 5 recipientes con:

- Agua.
- Agua, hielo y sal.
- Agua y hielo.
- Hielo y sal.
- Hielo.

Utilizar la consola de sensores con el sensor de temperatura para registrar los cambios de temperatura con el transcurso de los minutos.

Mediante el software de la consola (o de manera manual), registrar los datos en una tabla entregada.

Tiempo/ Temperatura (°C)	Agua	Agua con hielo	Agua con hielo y sal	Hielo	Hielo con sal

Momento III: Explicar y relacionar

Por último, se les hará una serie de preguntas el cual tiene como objetivo resignificar la gráfica de una función, esta parte responde directamente a la problemática planteada, ya que se les hará cuestionar lo que pasa con los datos si se agrega mayor cantidad de sal.

1. Grafique el comportamiento del recipiente asignado.
2. Analice y compare los gráficos del grupo.
3. Responda

    • ¿Cómo será la gráfica del vaso con agua? ¿Qué nombre recibe ese tipo de función?

    • ¿Qué recipiente presenta una mayor variación de temperatura con el transcurso del tiempo?

Momento 4: Cuestionario abierto.

• ¿A qué temperatura se congela el agua?

• ¿A qué temperatura el agua hierve?

- ¿El hielo se derrite o se disuelve con la sal?
- ¿Ustedes creen que pasa lo mismo con el azúcar?
- ¿Qué situación elegirían para disolver el hielo?
- ¿La temperatura afecta en la disolución del hielo?
- ¿Qué pasa con el volumen del agua?
- ¿Por qué el río se congela si es de agua dulce?

Reflexiones finales.

El objetivo de este documento fue presentar una propuesta que permita el diseño de situaciones de modelación en la formación inicial del profesor de matemática, considerando diferentes perspectivas sobre la modelación matemática en la educación, pero principalmente desde la teoría Socioepsitemologica. Esta perspectiva considera a la modelación como una práctica social que ha permitido la construcción de conocimiento. Desde las investigaciones desarrolladas bajo esta teoría; el uso de la gráfica y el estudio de la variación de fenómenos han expresado la modelación de la gente, de esta forma estos dos elementos se transforman en el argumento principal de los diseños que los estudiantes (futuros profesores de matemática) proponen. Para ellos la propuesta de acción para que los estudiantes diseñen situaciones de modelación está organizada en tres hitos: problematización de la modelación, reconocimiento de la comunidad y por ultimo diseño, aplicación y rediseño.

La problematización de la modelación pudiera desarrollarse hacia dos focos. Como señala Díaz y Arrieta (2015) la práctica de modelar debe considerar el modelo y lo modelado en una relación recíproca. Como se ve en el diseño del encandilamiento, los estudiantes centraron su atención en problematizar una noción que emerge del diseño de situación; las inecuaciones lineales. Mientras que en el diseño "¿Por qué echamos hielo al agua" la centración principal es lo modelado, es decir el fenómeno que se estudia.

Se debe considerar que cuando se reflexiona sobre la escuela, es latente la necesidad de institucionalizar los objetos matemáticos, de esta forma los futuros profesores sienten la necesidad de centrar sus diseños de modelación en un modelo particular.

El entendimiento de la comunidad, en este caso de una comunidad escolar, de jóvenes y niños que tienen diferentes dificultades con la matemática e intereses y también profesores que tienen sus propias creencias sobre la relación matemática realidad. En este sentido se logró desarrollar diagnósticos, que aún se encuentran en etapa inicial. Por ejemplo, en el caso de la situación del encandilamiento no se desarrolló diagnostico a estudiantes, en el caso de la segunda situación se desarrolló un diagnóstico, a nivel de piloto. En la actualidad se han desarrollado diagnósticos a estudiantes y profesores. Esto permite un mayor entendimiento de la comunidad, es decir considerar a la gente en sus escenarios haciendo modelación.

Y por último, el diseño, la aplicación y el rediseño, se desarrolla a partir de la articulación de los dos hitos anteriores. Considera conocimiento como el uso de la tecnología en la clase de matemática y la ingeniería didáctica como una metodología de validación local de los diseño.

Es importante destacar que ya se han realizado investigación (Díaz, 2018) sobre los cambios que sufre el futuro profesor de matemática ante la vivencia de este modelo, que en este documento no se han reportado, pero que es una línea que debe ser desarrollada a la par.

De esta forma, se puede concluir que el modelo de diseño de situaciones de modelación para futuros profesores de matemática, ha permitido a los futuros profesores generar diseños innovadores, que tratan a la modelación en el aula, además un conglomerado de situación, que como prospectiva es importante destacar el estudio de su reproducibilidad en el aula y los impactos que puedan generar en la comunidad escolar.

Referencias

Alsina-Pastells, Àngel. (2010). El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: un modelo para aprender a enseñar matemáticas. *Educación Matemática*, 22(1), 149-166.

Arrienta, J y Diaz, L. (2015). Lo lineal y su otredad. En J. Arrieta, & L. Diaz, *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación - Matemática Educativa* (17-58). Ciudad de México, México: Gedisa.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5). pp. 389-407.

Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling—Categorising the TSG21 papers. In M. Blomhøj & S. Carreira (Eds.), Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics: Proceedings from TSG21 at the ICME11 (pp. 1–17). IMFUFA-text no. 461, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University.

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? Journal of Mathematical Modelling and Application, 1 (1), 45-58.

Briceño, E. (2013). *El uso de la gráfica como instrumento de argumentación situacional con recursos tecnológicos*. Tesis de (doctorado) no publicada. Cinvestav-IPN, D.F, México.

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato*. . Tesis de (Maestría) no publicada. Cinvestav-IPN, D.F, México.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de la gráfica en el discurso matemático escolar. Un estudio sociepistemológico en el nivel básico a través de los libros de textos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), pp. 7-38.

Cordero, F.; Cen, C. y Suárez, L. (2010) Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(2):187-214.

D'Amore B. (2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Cientifica*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotà. 11, 150-164. ISSN: 0124-2253.

Huincahue, J., Borromeo, R., & Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las ciencias*, 99-115.

Huircán y Carmona (2013, p.14). *Guía de Aprendizaje Nº 3. Modelando el mundo con funciones exponenciales y logaritmos*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación. http://epja.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/43/2016/04/201404141135550.GuiaN3MatematicaIICiclodeEM.pdf

Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., & Garcia, F. J. (2007). *Report from the working group modelling and applications-Differentiating perspectives and delineating* *commonalties*. In Proceedings of the fifth congress of the European society for research in mathematics education, pp. 2035-2041.

Llinares, S. (2007). *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional*. Conferencia invitada en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas – JAEM. Granada, Julio.

Méndez, María Esther Magali (2016). *Explorando la formación inicial. Reflexión sobre el diseño y aplicación de una situación de modelación escolar.* En Mariscal, Elizabeth (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1114-1121). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Méndez, María Esther Magali; Marquina, Nancy; Zuñiga, Karen (2017). *Situaciones de aprendizaje para la modelación escolar.* En Serna, Luis Arturo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1046-1056). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G., (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico: Un estudio Socioepistemológico*. Ciudad de México: Ediciones Díaz de Santos.

Morales, A. y Cordero, F. (2014). La graficación - modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v.17 (3), pp.319-345

Solar, H., Azcárate, C., & Deulofeu, J. (2012). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), 133-154.

Soto, D. Silva-Crocci, H. Barbe, J. y Vergara, M. (2018). Prácticas educativas y el desarrollo de habilidades matemáticas: una propuesta de análisis para los instrumentos de evaluación de los docentes del Liceo Ruiz Tagle. En G. Watson, R.

Fernández y G. Guerrero. *Investigando juntos: experiencias asociativas entre escuelas y la Universidad de Santiago de Chile*. Santiago: Universidad de Santiago de Chile.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemologica. *Bolema- Boletim de Educação matemática*, Rio Claro, 28 (50), pp 1525-1544.

Suárez, L. y Cordero, F. (2010). Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 319 – 334

Villa-Ochoa, J., (2015). Aspectos de la modelación matemática en el aula de clase. El análisis de modelos como ejemplo. En J. Arrieta, & L. Diaz, *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación - Matemática Educativa*,109-138. Ciudad de México, México: Gedisa.

Zaldivar. J. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar*. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, D.F, México.